ДВАДЕСЕТ ЧЕТВРТИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло. Припремна варијанта, 20 октобар 2002.

8-9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

1 (4 поена). У конвексном 2002-углу је повучено неколико дијагонала, које се не секу унутар тог 2002-угла. Тиме је тај многоугао разложен на 2000 троуглова. Да ли је могуће да тачно једна половина тих троуглова за све три своје странице има дијагонале тог многоугла?

2 (5 поена). Саша и Маша су замислили по један природан број и саопштили га Васи. Васа је на једном листу папира записао збир та два броја, а на другом листу папира њихов производ. Потом је један од тих листова сакрио, а други (на којем је био записан број 2002) је показао Саши и Маши. Када је видео тај број, Саша је рекао да не зна који је број замислила Маша. Чувши то, Маша је рекла да не зна који број је замислио Саша. Који број је замислила Маша?

3. а) (1 поен). Одељење је радило контролну вежбу. Познато је да је барем две трећине задатака на тој контролној вежби било тешко: сваки од тих задатака није решило барем две трећине ученика. Познато је такође да је барем две трећине ученика добро урадило контролну вежбу: сваки такав ученик је урадио барем две трећине задатака са контролне вежбе. Да ли је то могуће?

б) (2 поена). Да ли ће се променити одговор на постављено питање ако се свуда у услову задатка две трећине замене са три четвртине?

в) (2 поена). Да ли ће се променити одговор на постављено питање ако се свуда у услову задатка две трећине замене са седам десетина?

4 (5 поена). На столу се налази 2002 картица на којима су написани бројеви 1, 2, 3, …, 2002. Два играча узимају наизменично по једну картицу. Када буду узете све картице, победник је онај играч код кога је већа последња цифра збира бројева на одабраним картицама. Одредите који од играча може увек да победи независно од тога како супарник игра и објасните како он при том треба да игра.

5 (5 поена). Дат је угао и тачка A унутар њега. Да ли је могуће повући три праве кроз тачку A, тако да на сваком од кракова угла једна од пресечних тачака тих правих са краком лежи у средишту међу другим двема тачкама пресека правих с тим истим краком.

ДВАДЕСЕТ ЧЕТВРТИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло. Припремна варијанта, 20. октобар 2002.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1 (4 поена). Саша и Маша су замислили по један природан број и саопштили га Васи. Васа је на једном листу папира записао збир та два броја, а на другом листу папира њихов производ. Потом је један од тих листова сакрио, а други (на којем је био записан број 2002) је показао Саши и Маши. Када је видео тај број, Саша је рекао да не зна који је број замислила Маша. Чувши то, Маша је рекла да не зна који број је замислио Саша. Који број је замислила Маша?

2. а) (1 поен). Одељење је радило контролну вежбу. Познато је да је барем две трећине задатака на тој контролној вежби било тешко: сваки од тих задатака није решило барем две трећине ученика. Познато је такође да је барем две трећине ученика добро урадило контролну вежбу: сваки такав ученик је урадио барем две трећине задатака са контролне вежбе. Да ли је то могуће?

б) (1 поена). Да ли ће се променити одговор на постављено питање ако се свуда у услову задатка две трећине замене са три четвртине?

в) (2 поена). Да ли ће се променити одговор на постављено питање ако се свуда у услову задатка две трећине замене са седам десетина?

3 (5 поена). Неколико правих, међу којима нема међусобно паралелних, деле раван на неколико области. Унутар једне од тих области је одабрана тачка A. Доказати да постоји тачка B са својством да свака од датих правих раздваја тачке A и B ако и само ако је област која садржи тачку A неограничена.

4 (5 поена). Нека су x, y, z произвољни бројеви из интервала $(0, \pi/2)$. Докажите неједнакост

$$\frac{x\cos x + y\cos y + z\cos z}{x+y+z} \leq \frac{\cos x + \cos y + cos z}{3}.$$

5 (5 поена) У бесконачном низу чији су чланови природни бројеви сваки следећи број се добија тако што се претходном броју дода једна његова цифара која је различита од нуле. Доказати да ће се у том низу наћи бар један паран број.

DVADESET ČETVRTI TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo. Osnovna varijanta, 27. oktobar 2002.

8-9. razred (mladji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.)

1. (4 poena) U banci radi 2002 zaposlenih. Svi zaposleni su došli na jubilej banke i bili su rasporedjeni za jedim okruglim stolom. Poznato je da se plate onih koji su susedi razlikuju za dva ili tri dolara. Kolika je najveća moguća razlika izmedju dve plate ako je poznato da svi zaposleni imaju različite plate?

2. (5 poena) Sve biljke koje rastu u Rusiji su numerisane brojevima od 2 do 20000 (bez preskakanja i ponavljanja brojeva). Za svaki par biljaka je izračunat najveći zajednički delitelj njima odgovarajućih brojeva, a sami brojevi su bili izgubljeni (zbog kvara na računaru). Da li je moguće da se svakoj biljci utvrdi njen broj?

3. (6 poena) Temena 50-ugla dele kružnicu na 50 lukova čije su dužine 1, 2, …, 50 u nekom poretku. Poznato je da razlika dužina suprotnih lukova (onih koji odgovaraju suprotnim stranicama tog 50-ougla) iznosi 25. Dokažite da se u tom mnogouglu može naći par paralelnih stranica.

4. (6 poena) Unutar trougla ABC se nalazi tačka P takva da je ugao ABP jednak uglu ACP a ugao CBP jednak uglu CAP. Dokažite da je P tačka preseka visina datog trougla.

5. (7 poena) Konveksni n-tougao je razložen nekim svojim dijagonalama na trouglove (pri tome se dijagonale ne seku unutar mnogougla). Trouglovi su obojeni u belo ili crno tako da su svaka dva trougla koji imaju zajedničku stanicu obojena različitim bojama. Za svako n nadjite maksimum razlike broja belih trouglova i broja crnih trouglova.

6. (9 poena) Imamo veliki broj kartica, a na svakoj od njih je napisan jedan od brojeva od 1 do n. Znamo da je zbir brojeva na svim karticama jednak $k \cdot n!$, gde je k prirodan broj. Dokažite da se te kartice mogu rasporediti u k grupa tako da je u svakoj grupi zbir cifara na karticama te grupe jednak $n!$.

7. a) (5 poena) Električna mreža ima oblik rešetke 3×3: ukupno 16 čvorova (temena kvadratne mreže) koji su spojeni provodnicima (stranicama kvadrata te mreže). Moguće je da su neki od provodnika pregoreli. U jednom merenju je moguće odabrati dva čvora i proveriti da li medju tim čvorovima ide tok struje (to jest, da li postoji lanac provodnika koji nisu pregoreli koji spaja ta dva čvora). Poznato je da je mreža takva da postoji tok izmedju svaka dva čvora. Koji je najmanji broj merenja koji omogućava da se to pouzdano utvrdi?

b) (5 poena) Isto pitanje za mrežu koja ima oblik rešetke 5×5 (ukupno 36 čvorova).

DVADESET ČETVRTI TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo. Osnovna varijanta, 27. oktobar 2002.

10-11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.)

1. (5 poena) Sve biljke koje rastu u Rusiji su numerisane brojevima od 2 do 20000 (bez preskakanja i ponavljanja brojeva). Za svaki par biljaka je izračunat najveći zajednički delitelj njima odgovarajućih brojeva, a sami brojevi su bili izgubljeni (zbog kvara na računaru). Da li je moguće da se svakoj biljci utvrdi njen broj?

2. (6 poena) Kocka je presečena jednom ravni tako da je u preseku dobijen petougao. Dokažite da postoji stranica tog petougla čija se dužina razlikuje od jednog metra najmanje za 20 centimetara.

3. (6 poena) Konveksni n-tougao je razložen nekim svojim dijagonalama na trouglove (pri tome se dijagonale ne seku unutar mnogougla). Trouglovi su obojeni u belo ili crno tako da su svaka dva trougla koji imaju zajedničku stanicu obojena različitim bojama. Za svako n nadjite maksimum razlike broja belih trouglova i broja crnih trouglova.

4. (8 poena) Imamo veliki broj kartica, a na svakoj od njih je napisan jedan od brojeva od 1 do n. Znamo da je zbir brojeva na svim karticama jednak $k \cdot n!$, gde je k prirodan broj. Dokažite da se te kartice mogu rasporediti u k grupa tako da je u svakoj grupi zbir cifara na karticama te grupe jednak $n!$.

5. Dve kružnice se seku u tačkama A i B. Kroz tačku B prolazi prava, koja seče prvu i drugu kružnicu još i u tačkama K i M respektivno. Prava l_1 dodiruje prvu kružnicu u tački Q i paralelna je pravoj AM. Prava QA seče drugu kružnicu u tački R. Prava l_2 dodiruje drugu kružnicu u tački R. Dokazati da

a) (4 poena) je prava l_2 paralelna AK;

b) (4 poena) prave l_1, l_2 i KM imaju zajedničku tačku.

6. (8 poena) Posmatrajmo niz čija su prva dva člana brojevi 1 i 2, a svaki sledeći član niza je najmanji prirodan broj koji se još nije pojavio u nizu a nije uzajamno prost sa prethodnim članom niza. Dokazati da se svaki prirodan broj javlja u tom nizu.

7. a) (5 poena) Električna mreža ima oblik rešetke 3×3: ukupno 16 čvorova (temena kvadratne mreže) koji su spojeni provodnicima (stranicama kvadrata te mreže). Moguće je da su neki od provodnika pregoreli. U jednom merenju je moguće odabrati dva čvora i proveriti da li medju tim čvorovima ide tok struje (to jest, da li postoji lanac provodnika koji nisu pregoreli koji spaja ta dva čvora). Poznato je da je mreža takva da postoji tok izmedju svaka dva čvora. Koji je najmanji broj merenja koji omogućava sa se to pouzdano utvrdi?

b) (5 poena) Isto pitanje za mrežu koja ima oblik rešetke 7×7 (ukupno 64 čvora).