21. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Плевен, Бугарска – 7. мај 2004.

1. Низ реалних бројева $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задовољава релацију

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$$

за све $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n$. Ако је $a_1 = 3$, наћи a_{2004}. *(Кипар)*

2. Решити у скупу простих бројева једначину

$$x^y - y^x = x \cdot y^2 - 19.$$

(Албанија)

3. Нека је O унутрашња тачка оштроуглог троугла ABC. Кругови са центрима у средиштима страница троугла ABC који пролазе кроз тачку O међусобно се секу у тачкама K, L и M различитим од O. Доказати да је O центар уписаног круга троугла KLM ако и само ако је O центар описаног круга око троугла ABC. *(Румунија)*

4. Раван је подељена на области коначним бројем правих, од којих никоје три не пролазе кроз исту тачку. Две области називамо "суседним" уколико је њихова заједничка граница дуж, полуправа или права. Потребно је у свакој области уписати цео број тако да важе следећа два услова:

(1°) производ бројева из суседних области је мањи од њиховог збира;

(2°) збир свих бројева са сваке стране произвољне праве једнак је нули.

Доказати да је то могуће ако и само ако све праве нису паралелне. *(Србија и Црна Гора)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

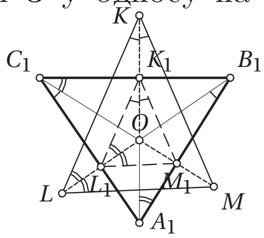
1. Стављањем $m=n$ добијамо $a_0=1$. Даље, за $n=0$ добијамо $a_{2m}=4a_m-2m-3$. Сада једнакост из задатка постаје $a_{m+n}+a_{m-n}=2(a_m+a_n-n-1)$. Одавде за $n=1$ добијамо $a_{m+1}-2a_m+a_{m-1}=2$, тј. $b_m=b_{m-1}+2$ за све m, где је $b_m=a_{m+1}-a_m$. Како је $b_0=2$, следи да је $b_m=2m+2$ и

$$a_m=a_0+b_0+b_1+\dots+b_{m-1}=1+(2+4+\dots+2m)=m^2+m+1.$$

2. По Фермаовој теореми је $x^y\equiv x \pmod y$, па из дате једначине добијамо $x\equiv -19 \pmod y$, тј. $y\mid x+19$. Слично, свођење по модулу x даје $x\mid y-19$. Како за $x=y$ нема решења, одавде следи да $xy\mid x-y+19$. Притом је $x-y+19=0$ немогуће: заиста, x би морао да буде паран, тј. $x=2$, али онда $y=21$ није прост. Дакле, $xy\leqslant|x-y+19|<x+y+19$, тј. $(x-1)(y-1)<20$.

Остаје да испитамо неколико случајева: (1) $x=2$, $y\leqslant 19$; (2) $x=3$, $y\leqslant 7$; (3) $y=3$, $5\leqslant x\leqslant 7$; или (4) $y=2$, $5\leqslant x\leqslant 19$. Директном провером налазимо да су $(2,3)$ и $(2,7)$ једина решења (x,y).

3. Означимо са A_1,B_1,C_1 редом средишта дужи BC,CA,AB. Друга пресечна тачка K кругова (B_1,B_1O) и (C_1,C_1O) је симетрична тачки O у односу на B_1C_1 јер је $B_1K=B_1O$ и $C_1K=C_1O$; аналогно су L и M редом симетричне тачки O у односу на C_1A_1 и A_1B_1, редом. Средишта K_1, L_1,M_1 дужи OK,OL,OM редом леже на правим B_1C_1,C_1A_1,A_1B_1. Приметимо да, ако је O ван $\triangle A_1B_1C_1$, онда је O такође ван $\triangle KLM$, па није центар уписаног круга $\triangle KLM$, а није ни центар описаног круга $\triangle ABC$. Зато надаље претпостављамо да је O унутар $\triangle A_1B_1C_1$.



Тачка O је центар уписаног круга $\triangle KLM$ ако и само ако је

$$\begin{aligned} &\sphericalangle OB_1A_1=\sphericalangle OK_1M_1=\sphericalangle OKM=\sphericalangle OKL=\sphericalangle OK_1L_1=\sphericalangle OC_1A_1\\ \text{и, слично,}\quad &\sphericalangle OA_1B_1=\sphericalangle OC_1B_1 \quad\text{и}\quad \sphericalangle OA_1C_1=\sphericalangle OB_1C_1. \end{aligned}\tag{$*$}$$

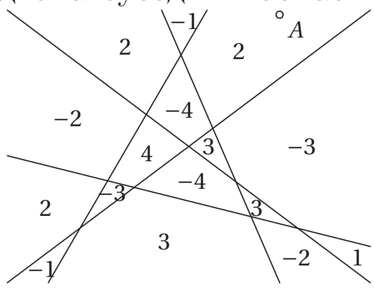
Ако је O центар описаног круга $\triangle ABC$, тј. ортоцентар $\triangle A_1B_1C_1$, онда $(*)$ важи (нпр. $\sphericalangle OA_1B_1=OC_1B_1=90^\circ-\sphericalangle A_1B_1C_1$). С друге стране, ако важи $(*)$, онда је $\sphericalangle B_1OC_1=180^\circ-\sphericalangle OB_1C_1-\sphericalangle OC_1B_1=180^\circ-\sphericalangle OA_1C_1-\sphericalangle OA_1B_1=180^\circ-\sphericalangle B_1A_1C_1$ и аналогно $\sphericalangle C_1OA_1=180^\circ-\sphericalangle C_1B_1A_1$, па је O ортоцентар $\triangle A_1B_1C_1$.

4. Ако су све праве паралелне, из услова (2°) следи да сви бројеви морају да буду 0, али тада не важи услов (1°), па је тражена додела немогућа.

Сада ћемо конструисати тражену доделу ако нису све праве паралелне. За почетак, фиксирајмо тачку A у равни која не лежи ни на једној од правих. За произвољну област R, одаберимо тачку B унутар ње. Јасно је да број k_R правих које секу дуж AB не зависи од избора тачке B. Осим тога, за сваке две суседне области R и S важи $k_R=k_S\pm 1$.

Области R додељујемо број $u_R\cdot(-1)^{k_R}$, где је u_R број углова у области R (пример на слици). Показаћемо да ова додела задовољава услове задатка.

(1°) По конструкцији, бројеви a и b додељени двема суседним областима су различитог знака, рецимо $a < 0 < b$. Зато је $ab \leqslant a < a + b$.



(2°) Упишимо у сваки угао сваке области R број $(-1)^{k_R}$. Збир бројева у областима с једне стране праве p једнак је збиру бројева у свим угловима на тој страни праве. Како је у свакој пресечној тачки збир бројева у угловима (којих је 2 или 4) једнак нула, укупан збир је такође 0.