КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ

Шабац, 18.04.2004.

1. Дат је квадрат $ABCD$ и круг γ са пречником AB. Нека је P произвољна тачка странице CD, M и N редом пресеци дужи AP и BP са γ који су различити од A и B, а Q тачка пресека правих DM и CN. Доказати да је $Q \in \gamma$ и да важи једнакост $AQ : QB = DP : PC$.

2. Нека су a, b, c реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да су највише два од бројева

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

већа од 1.

3. Нека је $P(x)$ полином n-тог степена са коренима $i-1$, $i-2$, $\ldots$, $i-n$ и нека су $R(x)$ и $S(x)$ полиноми са реалним коефицијентима такви да је

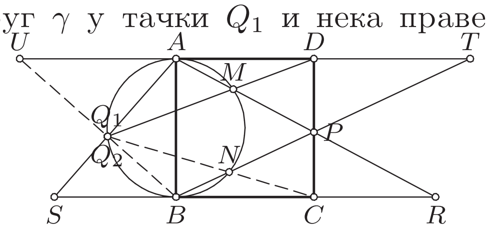
$$P(x) = R(x) + iS(x).$$

Доказати да полином R има n реалних нула. (i је имагинарна јединица.)

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

РЕШЕЊА

1. Нека права DM поново сече круг γ у тачки Q_1 и нека праве AM и AQ_1 редом секу праву BC у тачкама R и S. Тада из $AQ_1 \cdot AS = AB^2 = AD^2 = a^2$ следи $\triangle ADQ_1 \sim \triangle ASD$, одакле је $\sphericalangle ASD = \sphericalangle ADQ_1$. Слично важи $\sphericalangle ARD = \sphericalangle ADM$. Према томе, $\sphericalangle ASD = \sphericalangle ARD$, тј. тачке A, S, R, D леже на истом кругу, и зато је $BS = CR$.



Аналогно, ако је $Q_2 = CN \cap \gamma$ ($Q_2 \neq N$) и T, U су пресечне тачке BN, BQ_2 са AD редом, добијамо да је $AU = DT$.

Из $CR : AD = CP : PD = CB : DT$ следи $BS \cdot AU = CR \cdot DT = a^2$, одакле је $SB : BA = BA : AU$ и најзад $\triangle SBA \sim \triangle BAU$. Следи да је $AS \perp BU$, па се AS и BU секу на кругу γ, у тачки $Q \equiv Q_1 \equiv Q_2$. Шта више, $AQ : QB = AU : AB = DT : BC = DP : PC$.

Напомена. Може се показати да $Q \in \gamma$ и на следећи начин: ако је O центар квадрата, онда на основу Паскалове теореме A, M, O, N, B, Q леже на конусном пресеку, тј. кругу.

2. Ако се међу бројевима a, b, c налазе два негативна, рецимо a и b, онда је $2a - \frac{1}{b} < 0$ и тврђење је тривијално. Надаље претпостављамо да су $a, b, c > 0$.

Сменом $a = \frac{y}{z}$, $b = \frac{z}{x}$, $c = \frac{x}{y}$ услови $2a - \frac{1}{b} > 1$, $2b - \frac{1}{c} > 1$, $2c - \frac{1}{a} > 1$ постају $2y - x > z$, $2z - y > x$ и $2x - z > y$. Међутим, сабирањем добијамо $x + y + z > x + y + z$, што је контрадикција.

Друго решење. Као и у првом решењу, сматрамо да су $a, b, c > 0$. Из услова $2b - \frac{1}{c} > 1$ следи $b > \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{c})$. С друге стране, из $\frac{2}{bc} - \frac{1}{b} = 2a - \frac{1}{b} > 1$ добијамо $b < \frac{2}{c} - 1$. Дакле, $\frac{2}{c} - 1 > \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{c})$, што важи само за $c < 1$. Аналогно мора да важи $a < 1$ и $b < 1$, што је немогуће јер је $abc = 1$.

3. Означимо $P(x) = P_n(x) = R_n(x) + iS_n(x)$. Доказаћемо индукцијом по n да су све нуле P_n реалне; шта више, ако су $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ нуле R_n и $y_1 > y_2 > \cdots > y_{n-1}$ нуле R_{n-1}, да тада важи

$$x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \cdots > x_{n-1} > y_{n-1} > x_n.$$

Ово тврђење је тривијално тачно за $n = 1$. Претпоставимо да важи за $n - 1$.

Како је $R_n + iS_n = (x - i + n)(R_{n-1} + iS_{n-1})$, полиноми R_n и S_n су рекурентно повезани релацијама $R_n = (x+n)R_{n-1} + S_{n-1}$ и $S_n = (x+n)S_{n-1} - R_{n-1}$. Одавде добијамо

$$R_n - (2x + 2n - 1)R_{n-1} + [(x + n - 1)^2 + 1]R_{n-2} = 0.$$

Ако су $z_1 > \cdots > z_{n-2}$ (реалне) нуле R_{n-2}, по индуктивној претпоставци имамо $z_{i-1} > y_i > z_i$; како је вредност полинома R_{n-2} наизменично позитивна и негативна на интервалима $(z_1, +\infty)$, (z_2, z_1), итд, следи да је $\operatorname{sgn} R_{n-2}(y_i) = (-1)^{i-1}$. Сада из релације $R_n(y_i) = -[(x + n - 1)^2 + 1]R_{n-2}(y_i)$ следи да је $\operatorname{sgn} R_n(y_i) = (-1)^i$, што значи да полином R_n има нулу на сваком од n интервала $(y_1, +\infty)$, (y_2, y_1), $\dots$, $(-\infty, y_{n-1})$. Индукција је готова.

Друго решење. Реалан број a је нула полинома $R(x)$ ако је $\arg P(a) = \pm\frac{\pi}{2}$. Функција $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \arg(x + k - i)$ (при чему се вредности аргумената узимају у $(-\pi, \pi]$) је непрекидна и $\arg P(x) \equiv f(x) \pmod{\pi}$, па је довољно показати да $f(x)$ узима вредности облика $m\pi + \frac{\pi}{2}$ у n реалних тачака x. Међутим, ово важи јер је $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ и $\lim_{x\to\infty} f(x) = -n\pi$.

Напомена. Оба решења пролазе и ако се корени $i - 1, \dots, i - n$ замене произвољним комплексним бројевима са позитивним имагинарним деловима.