45. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Атина, Грчка – понедељак, 12. јул 2004.

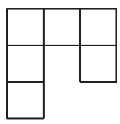
1. Дат је оштроугли троугао ABC такав да је $AB \neq AC$. Кружница чији је пречник BC сече странице AB и AC у тачкама M и N редом. Означимо са O средиште странице BC. Симетрале углова $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle MON$ секу се у тачки R. Доказати да се кружнице описане око троуглова BMR и CNR секу у тачки која припада страници BC. *(Румунија)*

2. Одредити све полиноме $P(x)$ са реалним коефицијентима који задовољавају једнакост

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

за све реалне бројеве a,b,c за које је $ab+bc+ca=0$. *(Јужна Кореја)*

3. Нека је *кука* фигура састављена од шест јединичних квадрата као на слици:



или ма која фигура добијена од ове фигуре применом ротација и осних симетрија. Одредити све $m \times n$ правоугаонике који се могу покрити кукама тако да

- правоугаоник буде покривен без празнина и преклапања;
- ни један део куке не буде изван правоугаоника. *(Естонија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

45. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Атина, Грчка – уторак, 13. јул 2004.

4. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Нека су $t_1, t_2, \ldots, t_n$ позитивни реални бројеви такви да је

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Доказати да су t_i, t_j, t_k дужине страница троугла за све i, j, k за које је $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$. *(Јужна Кореја)*

5. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дијагонала BD није симетрала нити угла $\sphericalangle ABC$ нити угла $\sphericalangle CDA$. Тачка P која се налази унутар четвороугла $ABCD$ је таква да је

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA \quad \text{и} \quad \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA.$$

Доказати да је $ABCD$ тетивни четвороугао ако и само ако је $AP = CP$. *(Пољска)*

6. Природан број зовемо *алтернирајућим* ако су сваке две суседне цифре у његовом децималном запису различите парности.

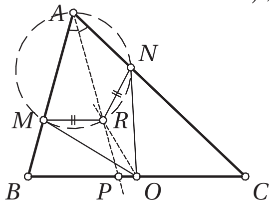
Одредити све природне бројеве n за које постоји алтернирајући број дељив са n. *(Иран)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Из $OM = ON$ следи $RM = RN$. Како је $AM \neq AN$ (јер је $\triangle ANM \sim \triangle ABC$), тачка R је пресек симетрале угла MAN и дужи MN, па лежи на кругу AMN.



Нека се праве AR и BC секу у тачки P. Тада је $\sphericalangle MRA = \sphericalangle MNA = \sphericalangle ABP$ и $\sphericalangle NRA = \sphericalangle NMA = \sphericalangle ACP$, па су четвороуглови $RMBP$ и $RNCP$ тетивни, тј. P је пресечна тачка кругова BMR и CNR.

2. Нека је $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. За свако x тројка $(a,b,c) = (6x, 3x, -2x)$ задовољава услов $ab + bc + ca = 0$. Услов по P нам даје $P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x)$ за све x, одакле упоређивањем коефицијената добијамо

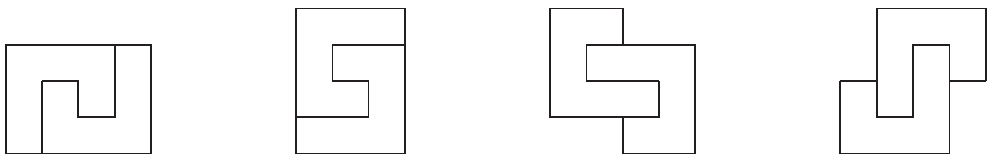
$$K(i) = 3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i = 0 \quad \text{кад год је} \quad a_i \neq 0.$$

Видимо да је $K(2) = K(4) = 0$. С друге стране, $K(i) < 0$ за непарне i и $K(i) > 0$ за парне $i \notin \{2,4\}$. Према томе, $P(x) = a_2 x^2 + a_4 x^4$ за неке реалне бројеве a_2, a_4.

Лако се проверава да $P(x) = ax^2 + bx^4$ задовољава тражени услов за све $a, b \in \mathbb{R}$.

3. *Одговор:* сви правоугаоници $m \times n$ у којима $12 \mid mn$, бар један од бројева m, n је дељив са 4 и $m, n \neq \{1,2,5\}$.

Претпоставимо да правоугаоник $m \times n$ може да се поплоча кукама. За сваку куку H, њен "унутрашњи" квадрат је покривен тачно једном куком K. С друге стране, H покрива унутрашњи квадрат куке K, па све куке могу да се поделе на парове $\{H, K\}$ који чине једну од следећих фигура површине 12:



A_1 $\quad$ A_2 $\quad$ B_1 $\quad$ B_2

Дакле, наш правоугаоник је покривен оваквим фигурама. Следи да $12 \mid mn$.

Претпоставимо да $4 \nmid m$ и $4 \nmid n$. Тада су m и n парни, а укупан број фигура са слике је непаран. Претпоставимо без смањења општости да је укупан број фигура A_1, B_1 непаран и обојмо сваку четврту колону у црно. Тада свака фигура A_1, B_1 покрива по три црна квадрата, док свака фигура типа A_2, B_2 покрива по два или четири. Следи да је број покривених црних квадрата непаран, што је немогуће јер има паран број црних квадрата.

Претпоставимо сада да нпр. $4 \mid m$. Ако $3 \mid n$, правоугаоник $m \times n$ се може поделити на правоугаонике 3×4. Такође, ако $12 \mid m$ и $n \notin \{1,2,5\}$, онда је $n = 3k + 4l$

за неке $k,l\in\mathbb{N}_0$, па се правоугаоник $m\times n$ може поделити на правоугаонике 3×12 и 4×12, и отуда на правоугаонике 3×4. С друге стране, ако $12\mid m$ и $n\in\{1,2,5\}$, лако се види да покривање кукама није могуће.

4. Због симетрије, довољно је доказати да је $t_1+t_2>t_3$. Имамо

$$S=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t\,i}\right)=n^2+\sum_{i<j}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}-2\right)\geqslant n^2+\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1}+\frac{t_2}{t_3}+\frac{t_3}{t_2}-4=n^2+c-4 \qquad (*)$$

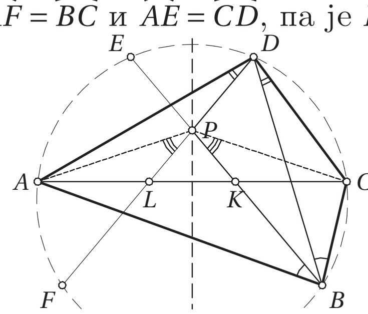
јер је $\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}-2\geqslant 0$ за све i,j. Претпоставимо да је $t_3=t_1+t_2+\epsilon$, $\epsilon\geqslant 0$. Тада је

$$c=\frac{t_1+t_2}{t_3}+\frac{t_3(t_1+t_2)}{t_1t_2}=\frac{t_3}{t_3}+\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}+\epsilon\left(\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}-\frac{1}{t_3}\right)\geqslant 1+\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}\geqslant 5,$$

дакле, $S\geqslant n^2+1$, што је контрадикција. Следи да је $t_3<t_1+t_2$.

Напомена. Тврђење остаје на снази ако се n^2+1 замени са $(n+\sqrt{10}-3)^2$. Ово је најбоља могућа оцена.

5. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао и нека праве BP и DP поново секу његов описани круг у тачкама E и F, редом. Тада је $\widehat{AF}=\widehat{BC}$ и $\widehat{AE}=\widehat{CD}$, па је $BF\parallel AC\parallel DE$. Следи да је $BDEF$ једнакокраки трапез и да $P=BE\cap DF$ лежи на заједничкој симетрали дужи BF,ED,AC, па је $AP=CP$.



Претпоставимо сада да је $AP=CP$. Нека праве BP и DP редом секу AC у тачкама K и L. Тачке A и C су изогонално конјуговане у $\triangle BDP$, дакле $\sphericalangle APL=\sphericalangle CPK$, одакле следи да су тачке K и L симетричне у односу на симетралу p дужи AC. Тада тачка E симетрична тачки D у односу на p лежи на правој BP, па је $\triangle APD\cong\triangle CPE$. Одавде је $\sphericalangle BDC=\sphericalangle ADP=\sphericalangle BEC$, тј. B лежи на кругу CDE, али A такође лежи на том кругу, одакле следи да су тачке A,B,C,D концикличне.

6. Ако $20\mid n$, сваки број дељив са n има две последње цифре парне, па није алтернирајући. Показаћемо да свако n са $20\nmid n$ има алтернирајући умножак A_n. За почетак, за свако m за које је $(m,10)=1$ и свако $k\in\mathbb{N}$ постоји број облика

$$I_{k,m}=\overline{1\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{k-1}\ldots\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1}=\frac{10^{ik}-1}{10^k-1},\quad i\in\mathbb{N}$$

такав да $m\mid I_{k,m}$: заиста, по Ојлеровој теореми можемо узети $i=\varphi((10^k-1)m)$.

(i) Ако је $(n,10)=1$, онда је $I_{2,n}$ алтернирајући и дељив са n.

(ii) Нека је $n=2\cdot 5^k m$, где је $(m,10)=1$. Покажимо да за свако r постоји r-цифрени алтернирајући број U_r (који може да почне нулом) дељив са 5^r - онда ћемо моћи да узмемо $A_n=10U_{2k}\cdot I_{2k,m}$.

Низ (U_r) дефинишемо индуктивно. Нека је $U_1=5$; за $r\geqslant 1$, нека је $c\in\{0,1,2,3,4\}$ такво да је $2^r c\equiv -\frac{U_r}{5^r} \pmod 5$, и нека је $d=c+5$. Тада су $(r+1)$-цифрени бројеви $\overline{cU_r}$ и $\overline{dU_r}$ дељиви са 5^{r+1}, а један од њих је алтернирајући: за U_{r+1} узимамо тај број.

(iii) Нека је $n=2^k m$, где је $(m,10)=1$. Покажимо да за свако r постоји $2r$-цифрени алтернирајући број V_r дељив са 2^{2r+1} - онда ћемо узети $A_n=V_k\cdot I_{2k,m}$.

Као и у случају (ii), V_r дефинишемо индуктивно. Узмимо $V_1=16$, а за $r>1$, тачно један од бројева $\overline{10V_r}, \overline{12V_r}, \overline{14V_r}, \overline{16V_r}$ се може узети за V_{r+1}.