Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Први разред – А категорија

1. У троуглу $\triangle ABC$, дужине страница су три узастопна природна броја. Ако је тежишна линија повучена из A нормална на симетралу угла $\sphericalangle ABC$, пронаћи дужине страница троугла.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. Нека су A_1, B_1 и C_1, редом, центри описаних кругова троуглова $\triangle BHC$, $\triangle CHA$ и $\triangle AHB$. Доказати да су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подударни.

3. Посматрајмо коначан низ од 2003 броја, при чему је $a_n = \left[\dfrac{n^2}{2004}\right]$, $n = 1, 2, \ldots, 2003$. Колико различитих чланова садржи тај низ?

4. Да ли постоји полином са целобројним коефицијентима такав да важи: **а)** $P(7) = 8$ и $P(15) = 12$; **б)** $P(8) = 7$ и $P(12) = 15$?

5. Трговац преко реке мора да превезе: сир, миша, пацова, мачку, пса, вука и медведа. У чамцу има места за само k од тих 7 објеката. Ако остави миша са сиром, миш ће га појести. Ако остави пацова са мишем или сиром пацов ће их појести. Ако остави мачку са пацовом или мишем она ће их појести. Ако остави пса са пацовом или мачком он ће их убити. Ако остави вука са псом или мачком он ће их убити. Ако остави медведа са псом или вуком он ће их убити. Претпоставља се да трговац све ове догађаје спречава да се десе кад је присутан. Које минимално k гарантује да он може све артикле безбедно да пребаци на другу страну реке?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Други разред – А категорија

1. Нека су m и n природни бројеви не мањи од 2. Доказати да постоји природан број k тако да важи $\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m = \dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$.

2. Дат је троугао $\triangle ABC$. Тангента t у тачки B на описану кружницу око тог троугла сече праву AC у тачки M. Наћи $\dfrac{AM}{MC}$, ако је $\dfrac{AB}{BC} = k$.

3. Ако је $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = 1$, доказати да је $x+y=0$.

4. Ако су тежишне линије ΔABC из темена B и C међусобно нормалне онда је: $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geqslant \dfrac{2}{3}$. Доказати. У ком случају важи једнакост?

5. Дата је бела табла 2002×2003 и доста црвене и беле боје.
а) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма која четири поља која чине квадрат 2×2. Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?
б) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма којих девет поља која чине квадрат 3×3. Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Трећи разред – А категорија

1. У правоугаонику $ABCD$ је $AB = 1$, $BC = 2$. Дата је тачка P унутар њега таква да је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 15^\circ$. Израчунати $\sphericalangle CPD$.

2. Ако су m, n и p одсечци које троугао $\triangle ABC$ одређује на правама које садрже средиште уписаног круга а паралелне су, респективно, са страницама $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$, доказати да је
$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 2.$$

3. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{2004}$ међусобно различити реални бројеви. Ако је за свако $i \in \{1, 2, \ldots, 2004\}$
$$(a_i + b_1)(a_i + b_2)\ldots(a_i + b_{2004}) = \alpha,$$
доказати да, за свако $i \in \{1, 2, \ldots, 2004\}$ важи
$$(b_i + a_1)(b_i + a_2)\ldots(b_i + a_{2004}) = -\alpha.$$

4. Наћи све просте бројеве p и q, такве да је број
$$\sqrt{p^2 + 14pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 7pq + q^2}$$
природан.

5. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ које за све $x, y \in \mathbb{N}$ задовољавају
$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \qquad \text{кад је } \frac{x+y}{3} \in \mathbb{N}.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је $ABCD$ правоугаоник. Нека је E подножје висине из A на BD. Нека је F произвољна тачка на дијагонали BD између D и E. Нека је G пресек праве CF и нормале из B на AF. Нека је H пресек праве BC и нормале из G на BD. Доказати да је $\sphericalangle EGB = \sphericalangle EHB$.

2. Дата је $n \times n$ квадратна таблица $[a_{ij}]$, где је $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$. Одаберимо n бројева из таблице, тако да нису одабрана два броја из исте врсте или два броја из исте колоне. Доказати да збир тих n бројева не може бити мањи од 1.

3. Одредити услов који треба да задовоље реални бројеви a и b тако да систем

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & b^2 \end{array}$$

има јединствено реално решење. У којим случајевима систем нема решења?

4. Дате су две шаховске табле 2×4 и у доњем левом углу прве налази се краљ, а у доњем левом углу друге топ. Означимо са k_n број различитих n-потеза краљем, а са t_n број различитих n-потеза топом. За које n важи $k_n < t_n$?

5. Дат је правоугли троугао T. Да ли је могуће извршити разбијање троугла T на 2004 троуглића који испуњавају следеће услове:
1° сваки од тих троуглића је сличан троуглу T;
2° не постоје два троуглића који су подударни?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да је $n^n - n$ дељиво са 24 за све непарне природне бројеве n.

2. Нека је S пресек, међусобно управних, дијагонала AC и BD конвексног и тетивног четвороугла $ABCD$. Доказати да нормала из тачке S на праву BC полови дуж AD.

3. У троуглу $\triangle ABC$ за унутрашње углове важи $\alpha - \beta = 2\gamma$.
а) Доказати да је угао α туп.
б) На правој AB, иза тачке A у односу на тачку B, је дата тачка E таква да је $EC = AC$. Доказати да је CA симетрала угла $\sphericalangle ECB$.

4. Нека је дато пресликавање $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тако да за све $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) + 2f(1-x) = x$. Одредити $f(x)$.

5. У једној групи људи се налазе три Италијана, четири Француза и пет Шпанаца. На колико различитих начина се сви ови људи могу поређати у низ тако да сви Французи буду један поред другог, сви Шпанци један поред другог и никоја два Италијана не буду један до другог?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Други разред – Б категорија

1. Дијагонале тетивног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Ако је $BC = CD = 12cm$ и $OC = 4cm$, наћи дужину дијагонале AC.

2. Доказати да разлика решења једначине
$$5x^2 - 2(5a+3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$
не зависи од a.

3. Доказати да за свако $x \geqslant 0$ важи неједнакост
$$\sqrt{x}(x+1) + x(x-4) + 1 \geqslant 0.$$

4. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја
$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004} + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004}.$$

5. За које вредности реалних бројева x и y израз
$$E = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2$$
има најмању вредност?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све реалне бројеве x, y, z, t такве да је
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t).$$

2. Наћи сва решења неједначине $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

3. Тачка A припада кругу k полупречника r. Ap и Aq су полуправе такве да је $\sphericalangle pAq = 60^\circ$. Ако су B и C пресечне тачке тих полуправих и круга k, наћи дужину тетиве BC.

4. Систем једначина
$$\begin{array}{ccccc} bx & + & ay & = & c, \\ cx & + & az & = & b, \\ cy & + & bz & = & a \end{array}$$
има јединствено решење. Доказати да је тада $abc \neq 0$ и наћи то решење.

5. Израчунати запремину пирамиде, чија је основа једнакостранични троугао странице a, ако су бочне стране нагнуте према равни основе под угловима α, β и γ.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи висину купе максималне површине омотача уписане у лопту полупречника R.

2. Дат је комплексан број $z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \varphi \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. Одредити модул и аргумент комплексног броја $\dfrac{z+1}{z-1}$.

3. Наћи област вредности функције $\quad y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

4. Доказати да се ни за један природан број n збир $1+2+\ldots+n$ не може завршавати неком од цифара 2,4,7,9.

5. Колико највише оштрих углова може имати конвексан многоугао?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.