Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Први разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C. Нека су N и M тачке правих AB и BC, редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN. Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.

2. Природни бројеви a, b и c су такви да су бројеви
$$p = b^c + a,\ q = a^b + c \text{ и } r = c^a + b$$
прости. Доказати да су два од бројева p, q, r међусобно једнаки.

3. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3+3x+q=0$ нема целобројних решења.

4. На колико начина можемо распоредити m различитих птица у n различитих кавеза тако да сваки кавез садржи бар једну, али највише две птице?

5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004. Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Други разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C. Нека су N и M тачке правих AB и BC, редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN. Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.

2. Наћи све бројеве $b \in \mathbb{N}$ за које постоји $a \in \mathbb{N}$ тако да
$$b \mid a^2 + 1 \text{ и } b \mid a^3 - 1.$$

3. Нека су x, y и z ненегативни реални бројеви који задовољавају $x + y + z = 1$. Наћи најмању могућу вредност израза $x + y^2 + z^2$.

4. Решити једначину $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17 - x} = 3$.

5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004. Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Трећи разред – А категорија

1. Јединични квадрат је подељен на правоугле троуглове. (Троуглови немају заједничких унутрашњих тачака.) Нека је S збир хипотенуза свих тих троуглова. Доказати да је $S \geqslant 2\sqrt{2}$. Када важи једнакост?

2. **а)** Ако је $x \equiv y \pmod{p}$ онда је и $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$. Доказати.
б) Решити једначину $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ у $\mathbb{N}$.

3. Једначина
$$x^3 + px + q = 0$$
има комплексан корен $a+bi$, где су $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ и $q, b \neq 0$. Показати да је $aq > 0$.

4. Доказати да је број
$$n^{2003} + n + 1$$
сложен за сваки природан број n, $n > 1$.

5. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је $\triangle ABC$ троугао такав да је $\sphericalangle ACB \geqslant 120^\circ$. Нека је R полупречник описаног круга тог троугла. Доказати:

$$3R \geqslant AC + BC + \frac{AB}{\sqrt{3}}\ .$$

У ком случају важи једнакост?

2. Решити једначину $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ у $\mathbb{N}$.

3. На свечаној смотри поводом дана Војске СЦГ изабрано је из сваког од 4 различита рода (пешадија, артиљерија, ваздухопловство и морнарица) по 4 војника различитих чинова (по један десетар, водник, поручик и капетан). Помозите мајору, задуженом за прославу, који је добио наређење да тих 16 војника размести у строј облика квадрата, тако да у сваком реду и свакој колони буду смештена 4 војника из различитих родова и са различитим чиновима.

4. Доказати да је број

$$n^{17} + n^1 + n^{2004} + n^8 + 1$$

сложен за сваки природан број n, $n > 1$.

5. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Први разред – Б категорија

1. Цифре a и b су различите и такве да важи
$$\overline{aa}\cdot\overline{ba}\cdot\overline{aba}=\overline{abaaba}.$$
Дешифровати ову једнакост.

2. У троуглу $\triangle ABC$ $(BC>CA)$ је $\sphericalangle CAB-\sphericalangle ABC=45^\circ$. Ако је D тачка странице BC таква да је $CD=CA$, израчунати величину угла $\sphericalangle BAD$.

3. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3+3x+q=0$ нема целобројних решења.

4. Колико има једнакокраких троуглова, чије су странице целобројне, а обим једнак $30cm$?

5. Доказати да је број $2^{12}+5^9$ сложен.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Други разред – Б категорија

1. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) конструисана је висина CD. Симетрала угла $\sphericalangle CAB$ сече праву CD у тачки P, а симетрала угла $\sphericalangle BCD$ сече праву BD у тачки Q. Доказати да је $PQ \parallel BC$.

2. Испитати да ли квадратна једначина
$$(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0,$$
где су $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, може имати реалне и различите корене.

3. Решити једначину $\quad \sqrt{4x^2-4x+1}-|3x-2|-3x=1.$

4. Дата је једначина $(a-1)x^2-(a+1)x+2a-1=0$, при чему је $a \neq 1$. Наћи све вредности параметра b за које израз
$$(x_1-b)(x_2-b)$$
не зависи од a, при чему су x_1 и x_2 корени дате једначине.

5. Доказати да је број $2^{12}+5^9$ сложен.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати вредност израза
$$\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$$
без примене калкулатора и таблица.

2. Доказати неједнакост $\quad (\log_{2003} 2004)^{-1} + (\log_{2005} 2004)^{-1} < 2.$

3. Равни α и β секу се по правој c. Нека је φ угао диедра кога чине те две равни, а ψ угао између неке праве p равни α и праве c. Ако је γ угао између праве p и равни β, доказати да важи
$$\sin\gamma = \sin\varphi \sin\psi.$$

4. Израчунати вредност детерминанте $\quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}.$

5. Решити систем једначина у скупу реалних бројева: $\quad \begin{aligned} x^3y^3z^4 &= 1 \\ x^2y^4z^4 &= 2 \\ x^2y^3z^5 &= 3\ . \end{aligned}$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

17.01.2004.

Четврти разред – Б категорија

1. Скуп природних бројева разбијен је у групе на следећи начин:
$$\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10\}, \ldots$$
Наћи збир чланова n-те групе.

2. Нека су x_1, x_2, x_3 корени полинома x^3+mx+n, $(n \in \mathbb{Z})$. Доказати да је ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$ цео број дељив са 3.

3. У правоуглом троуглу у коме је хипотенуза $c = 8$ и оштар угао $\alpha = 60^\circ$ уписан је правоугаоник максималне површине, тако да му једна страница припада хипотенузи троугла. Одредити дужине страница тог правоугаоника.

4. Наћи реална решења система једначина
$$\frac{1}{1+(x-y)^2} = z+4, \quad \sqrt{z+3}+2x = 8.$$

5. Решити систем једначина у скупу реалних бројева:
$$\begin{aligned} x^3y^3z^4 &= 1 \\ x^2y^4z^4 &= 2 \\ x^2y^3z^5 &= 3\ . \end{aligned}$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.