44. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Шабац, 17.04.2004.

Први разред

1. Наћи све парове природних бројева (a,b) за које важи

$$5a^b - b = 2004.$$

2. Дат је троугао $\triangle ABC$ и тачке D и E редом на полуправим CB и CA тако да важи $CD = CE = \dfrac{AC+BC}{2}$. Нека је H ортоцентар троугла ABC и P средиште лука AB кружнице описане око троугла ABC који не садржи тачку C. Доказати да права DE полови дуж HP.

3. Ако су a, b, c позитивни бројеви, такви да је $abc = 1$, доказати да је

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \geqslant \sqrt{2}.$$

4. У простору је дат скуп S од 100 тачака, тако да никоје 4 од њих не припадају једној равни. Доказати да не постоји више од $4\cdot 101^2$ тетраедара са теменима из скупа S, таквих да свака два од тих тетраедара имају највише два заједничка темена.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

44. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Шабац, 17.04.2004.

Други разред

1. Ако су a, b, c природни бројеви такви да је и $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$ природан број, доказати да је abc потпун куб.

2. Дат је оштроугли троугао са полупречником уписане кружнице r. Доказати да збир растојања ортоцентра од страница троугла није већи од $3r$.

3. Нека су M, N, P произвољне тачке редом на страницама BC, CA, AB оштроуглог троугла ABC. Доказати да је тачна бар једна од неједнакости

$$NP \geqslant \frac{1}{2}BC, \quad PM \geqslant \frac{1}{2}CA, \quad MN \geqslant \frac{1}{2}AB.$$

4. Разговарали су барон Минхаузен и математичар. Барон Минхаузен је рекао да се у његовој земљи из сваког града може путем стићи у било који други град. При томе, ако се из произвољног града путује по земљи произвољним путем до повратка у тај град, онда се прође кроз непаран број успутних градова. Математичар је питао колико пута се броји град ако се више пута прође кроз њега. Барон је одговорио да се такав град броји онолико пута колико пута се прође кроз њега. Осим тога, барон Минхаузен је додао да из сваког града у његовој земљи полази једнак број путева, осим из његовог родног града из кога полази мањи број путева. На то је математичар рекао да барон Минхаузен лаже. Како је то закључио?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

44. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Шабац, 17.04.2004.

Трећи и четврти разред

1. У троуглу $\triangle ABC$ површине S тачка H је ортоцентар, D, E и F су подножја висина из A, B и C, а P, Q и R тачке симетричне тачкама A, B и C у односу на праве BC, CA и AB, редом. Познато је да троуглови DEF и PQR имају једнаку површину T и да је $T > \frac{3}{5}S$. Доказати да је $T = S$.

2. Низ (a_n) одређен је условима $a_1 = 0$ и

$$(n+1)^3 a_{n+1} = 2n^2(2n+1)a_n + 2(3n+1) \quad \text{за} \quad n \geqslant 1.$$

Доказати да бесконачно много чланова низа припада скупу природних бројева.

3. Нека је $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Колико има подскупова B скупа A, таквих да за свако $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ важи: ако $n \in B$ и $n+2 \in B$, онда бар један од бројева $n+1$ и $n+3$ такође припада скупу B?

4. Нека је (a_n) низ одређен условима $a_1 = x \in \mathbb{R}$ и $3a_{n+1} = a_n + 1$ за $n \geqslant 1$. Нека је

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n - \frac{1}{6} \right], \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + \frac{1}{6} \right].$$

Израчунати збир $A + B$ у зависности од x.

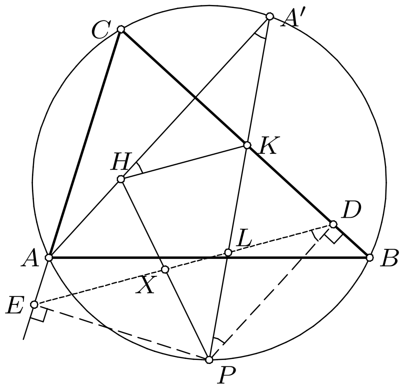
Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

РЕШЕЊА

1.1. За $a = 1$ нема решења, док за $a \geqslant 2$ и $b \geqslant 9$ важи $5a^b - b \geqslant 5 \cdot 2^9 - 9 = 2551$. Провером за $b \leqslant 8$ налазимо решење $(a, b) = (401, 1)$.

1.2. Посматрајмо тачку Z на полуправој CB такву да је $CZ = CA$. Из подударности троуглова PCZ и PCA следи $PZ = PA = PB$, а такође је $BD = DZ = \frac{|CB-CA|}{2}$ и $\sphericalangle PBD = 180^\circ - \sphericalangle PAC = 180^\circ - \sphericalangle PZC = \sphericalangle PZD$. Одавде следи да је $\triangle PZD \cong \triangle PBD$, па је $PD \perp BC$, а отуда и $PE \perp AC$.

Нека је A' тачка симетрична тачки H у односу на праву BC и нека права PA' сече BC и DE редом у тачкама K и L, а права PH сече DE у тачки X. Како је $AA' \parallel DP$, важи $\sphericalangle DPL = \sphericalangle DPA' = \sphericalangle PA'A = \sphericalangle PCE = \sphericalangle PDL$, па је $LP = LD$, што значи да је L средиште хипотенузе PK правоуглог троугла PDK. Осим тога, из $\sphericalangle PDL = \sphericalangle PA'A = \sphericalangle KHA'$ и $AA' \parallel DP$ следи и $DE \parallel KH$.



Према томе, LX је средња линија у троуглу PKH, па је X средиште дужи PH.

Напомена. Познато је општије тврђење, уз практично исти доказ: ако је P тачка на описаном кругу троугла ABC и H ортоцентар троугла, онда Симсонова права тачке P полови дуж PH.

1.3. По неједнакости између средина је $2\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2})} \leqslant 1 + b + \frac{1}{a}$, односно

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{1 + b + \frac{1}{a}} .$$

Сабирањем са аналогним неједнакостима за преостала два сабирка добијамо

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{a+ab+1} + \frac{ab\sqrt{2}}{ab+abc+a} + \frac{\sqrt{2}}{1+a+ab} = \sqrt{2} \cdot \frac{1+a+ab}{1+a+ab} = \sqrt{2}.$$

Напомена. Једнакост се никад не достиже. С друге стране, нпр. за довољно велике a и b, вредност посматраног израза може бити произвољно близу $\sqrt{2}$.

1.4. Нека је n број тетраедара. У сваком тетраедру постоје 4 неуређене тројке темена, а по услову задатка свих $4n$ тројки су различите. Зато је $4n \leqslant \binom{100}{3}$, тј. $n \leqslant \frac{1}{4}\binom{100}{3} < 4 \cdot 101^2$.

2.1. Ако је нзд$(a,b,c) = d > 1$, довољно је да докажемо тврђење за бројеве $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$. Зато можемо да сматрамо без смањења општости да је нзд$(a,b,c) = 1$. За $a = b = c = 1$ тврђење је тривијално, па надаље претпостављамо да је $abc > 1$.

Посматрајмо произвољан прост делилац p броја abc. Нека нпр. $p \nmid a$ и нека $p^k \mid b$ и $p^{k+1} \nmid b$. Степен броја p у имениоцу у скраћеном запису разломка $\frac{a}{b}$ једнак је p^k. Међутим, како је $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ цео број, степен p у имениоцу бар једног од скраћених разломака $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$ мора такође да буде једнак p^k. То мора бити $\frac{b}{c}$ ($\frac{c}{a}$ отпада јер $p \nmid a$). Следи да је степен p у броју c једнак p^{2k}, па је експонент p у канонској факторизацији abc једнак $3k$. Ово важи за свако p, па је abc потпун куб.

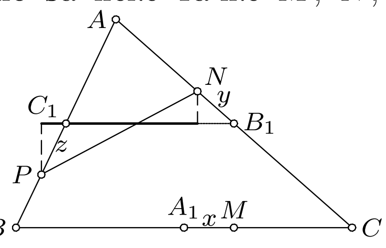
2.2. Уз уобичајене ознаке за странице и углове троугла, означимо са d_a, d_b, d_c редом растојања од ортоцентра H до страница BC, CA, AB, а са A', B', C' редом подножја висина из A, B, C.

Нека је $a \geqslant b \geqslant c$. Тада је $d_a = CH\cos\beta \geqslant CH\cos\alpha = d_b$; слично је и $d_b \geqslant d_c$. Сада на тројке (a,b,c) и (d_a,d_b,d_c) можемо да применимо Чебишовљеву неједнакост: имамо

$$\begin{aligned}(a+b+c)(d_a+d_b+d_c) &\leqslant 3(ad_a+bd_b+cd_c)\\ &= 6(P_{BCH}+P_{CAH}+P_{ABH}) = 6P_{ABC}\\ &= 3(a+b+c)r,\end{aligned}$$

тј. $d_a + d_b + d_c \leqslant 3r$.

2.3. Претпоставимо да тврђење није тачно за неке тачке M, N, P. Нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB. Означимо $x = BM - BA_1$, $y = CN - CB_1$, $z = AP - AC_1$. Дужина пројекције дужи NP на B_1C_1 једнака је $p_a = B_1C_1 + z\cos B - y\cos C$, па из $p_a \leqslant NP < B_1C_1$ следи $z\cos B < y\cos C$, тј. $\frac{z}{\cos C} < \frac{y}{\cos B}$. Аналогно се показује да важи $\frac{y}{\cos B} < \frac{x}{\cos A}$ и $\frac{x}{\cos A} < \frac{z}{\cos C}$, што је немогуће.



2.4. Посматрајмо граф у коме су темена градови, а гране директни путеви између њих. Покажимо да је овај граф бипартитан - другим речима, да се градови могу обојити у црвено и плаво тако да никоја два града исте боје нису повезана граном.

Дужину пута између градова Z_1 и Z_2 дефинишемо као број успутних градова увећан за 1. Обојмо Минхаузенов родни град X црвеном бојом. Сваки град $Y \neq X$ ћемо обојити у црвено ако између X и Y постоји пут парне дужине, а у супротном у плаво. Ово бојење је добро дефинисано: заиста, ако би између два града Z_1 и Z_2 постојали путеви p_1 и p_2, парне и непарне дужине, онда кружни пут настао спајањем путева p_1 и p_2 има непарну дужину (тј. има паран број успутних градова), што је немогуће. Такође, између два града Z_1 и Z_2 исте боје не постоји директан пут, јер би у супротном кружни пут $X - Z_1 - Z_2 - X$ имао непарну дужину.

Нека су сада c и p редом бројеви црвених и плавих градова. Из града X полази m грана, а из сваког другог града полази $n > m$ грана. Свака грана спаја по један црвени и један плави град, па је укупан број грана, гледано из плавих градова, једнак pn. С друге стране, гледано из црвених градова, укупан број градова је $(c-1)n + m$. Следи да је $(c-1)n + m = pn$, па $n \mid m$, што је немогуће јер је $0 < m < n$.

3.1. Нека су α, β, γ углови троугла ABC, а R полупречник његовог описаног круга. Троуглови CDE и CAB су слични с коефицијентом $\cos\gamma$, па је $P_{CDE} = S\cos^2\gamma$. Аналогно $P_{AEF} = S \cdot \cos^2\alpha$ и $P_{BFD} = S\cos^2\beta$. Због тога је

$$P_{DEF} = |S - S\cos^2\alpha - S\cos^2\beta - S\cos^2\gamma| = S|\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2|.$$

С друге стране имамо да је $P_{PQR} = P_{ABC} + P_{ABR} + P_{BCP} + P_{CAQ} - P_{PBR} - P_{RAQ} - P_{QCP} = 4S - P_{PBR} - P_{RAQ} - P_{QCP}$. Даље је $P_{RAQ} = \frac{1}{2}AQ \cdot AR\sin 3\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = (3 - 4\sin^2\alpha)S$. Аналогно имамо $P_{PBR} = (3 - 4\sin^2\beta)S$ и $P_{QCP} = (3 - 4\sin^2\gamma)S$, па је

$$P_{PQR} = S|4(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) - 5|.$$

Означимо $x = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$. Из $P_{PQR} = P_{DEF} = T$ следи да је $|x - 2| = |4x - 5|$, што је задовољено само за $x \in \{1, \frac{7}{5}\}$. За $x = \frac{7}{5}$ добијамо да је $T = |\frac{7}{5} - 2|S = \frac{3}{5}S$, противно услову задатка. Према томе, $x = 1$ и $T = S$.

3.2. Смена $b_n = n^2 a_n$ даје $(n+1)b_{n+1} = 2(2n+1)b_n + 2(3n+1)$, што даље сменом $c_n = b_n + \alpha$ постаје $c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}c_n + \frac{3n+1}{n+1}(2-\alpha)$. Тако за $\alpha = 2$ имамо $c_1 = 2$ и $c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}c_n$. Једноставна индукција даје $c_n = \frac{2^n(2n-1)!!}{n!} = \binom{2n}{n}$, па је

$$a_n = \frac{\binom{2n}{n} - 2}{n^2}\,.$$

Познато је да $p^2 \mid \binom{2p}{p} - 2$ за сваки прост број p: заиста, $\binom{2p}{p} - 2 = \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}^2 \equiv 2 \pmod{p^2}$ јер $p \mid \binom{p}{i}$. Према томе, $a_p \in \mathbb{N}$ за свако просто p.

3.3. Сваком подскупу $B \in \{1, \dots, 11\}$ одговара низ нула и јединица дужине 11, где је $a_i = 1$ ако $i \in B$ и $a_i = 0$ ако $i \notin B$. Ми тражимо x_{11}, где је x_n број низова нула и јединица дужине n који не садрже подниз 1010 - овакве низове називаћемо "добрим".

Број добрих низова дужине n који се завршавају са 1 једнак је x_{n-1}. Број добрих низова дужине n који се завршавају са 0 једнак је броју добрих низова дужине $n-1$ који се не завршавају са 101. Број добрих низова дужине $n-1$ који се завршавају са 101 једнак је броју y_{n-2} добрих низова дужине $n-2$ који се завршавају са 10. Према томе, $x_n = 2x_{n-1} - y_{n-2}$. Притом је број y_m добрих низова дужине m који се завршавају са 10 једнак броју добрих низова дужине $m-2$ који се *не* завршавају са 10, дакле $y_m = x_{m-2} - y_{m-2}$. Следи да је $x_{n-4} = y_{n-2} + y_{n-4} = (2x_{n-1} - x_n) + (2x_{n-3} - x_{n-2})$, што нам даје рекурентну везу $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 2x_{n-3} - x_{n-4}$.

Лако проверавамо да је $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$ и $x_4 = 15$. Користећи рекурентну везу, лако израчунавамо чланове низа: редом, $2, 4, 8, 15, 28, 53, 100, 188, 354, 667, 1256 = x_{11}$.

3.4. Сменом $a_n = b_n + \frac{1}{2}$ добијамо $3b_{n+1} = b_n$ и притом $A = \sum_{n=1}^{\infty}[b_n + \frac{1}{3}]$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty}[b_n + \frac{2}{3}]$. Дефинишимо $b_0 = 3b_1$. Користећи Ермитов идентитет $[y] + [y + \frac{1}{3}] + [y + \frac{2}{3}] = [3y]$ добијамо $[b_n + \frac{1}{3}] + [b_n + \frac{2}{3}] = [b_{n-1}] - [b_n]$. Како $[b_n] = [\frac{x-1/2}{3^{n-1}}] \to 0$ за $x \geqslant \frac{1}{2}$ и $[b_n] \to -1$ за $x < \frac{1}{2}$ када $n \to \infty$, коначно имамо

$$A+B = \sum_{n=1}^{\infty}([b_{n-1}]-[b_n]) = [b_0] - \lim_{n\to\infty}[b_n] = \begin{cases} \left[3\left(x - \frac{1}{2}\right)\right], & \text{за } x \geqslant \frac{1}{2}, \\ \left[3\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] + 1, & \text{за } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$