25. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 19. октобар 2003. год.

8-9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (3 поена) Свака страна кутије облика паралелопипеда са ивицама 3, 4, 5 подељена је на јединична квадратиће. Може ли се у сваки квадратић уписати број тако да збир бројева у сваком прстену ширине 1, описаном око те кутије, буде 120?

2. (4 поена) У седмоуглу $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ дијагонале A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7, A_6A_1 и A_7A_2 једнаке су међу собом. Дијагонале A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, A_4A_7, A_5A_1, A_6A_2 и A_7A_3 такође су међусобно једнаке. Мора ли тај седмоугао бити правилан?

3. (4 поена) За сваки цео број од $n+1$ до $2n$ укључујући и $2n$ (где је n природан број) је одабран његов највећи непаран делилац и сви ти делиоци су сабрани. Доказати да је тај збир једнак n^2.

4. (4 поена) N тачака у равни, од којих никоје три не леже на једној правој, су међусобно спојене дужима (свака са сваком). Неке дужи су обојене црвеном, а остале плавом бојом. Црвене дужи чине затворену изломљену линију без самопресецања, као и плаве. Наћи све N за које је то могуће.

5. (5 поена) На траци $1 \cdot N$ на првих 25 поља (с лева) стоји 25 жетона. Жетон се може померити на суседно слободно десно поље или прескочити суседни жетон са десне стране на следеће поље (уколико је оно празно), померање у лево није дозвољено. За које најмање N је могуће све жетоне поређати без размака у обрнутом поретку?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 19. октобар 2003. год.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (3 поена) За сваки цео број од $n+1$ до $2n$ укључујући и $2n$ (где је n природан број) је одабран његов највећи непаран делилац и сви ти делиоци су сабрани. Доказати да је тај збир једнак n^2.

2. (4 поена) Који је најмањи број квадрата 1×1 које треба нацртати да би се добила слика квадрата величине 25×25 подељеног на 625 квадрата 1×1?

3. (5 поена) Продавац и купац имају укупно 1999 рубаља у апоенима од 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 рубаља. Мачка у џаку кошта целобројан број рубаља и купац има довољно новца да је купи. Доказати да купац може купити мачку и добити тачан износ кусура.

4. Четири правоугла троугла су конструисана ван јединичног квадрата тако да су нихове хипотенузе четири странице квадрата. Нека су A, B, C, D темена тих троуглова наспрам хипотенуза и нека су O_1, O_2, O_3, O_4 центри уписаних кругова у те троуглове. Доказати да:

(3 поена) а) површина четвороугла ABCD није већа од 2.

(3 поена) б) површина четвороугла $O_1O_2O_3O_4$ није већа од 1.

5. (6 поена) Папирни тетраедар је расечен дуж неких својих ивица тако да се може развити у раван. Да ли се може десити да се тај развој у раван не може остварити без преклапања (то јест, у једном слоју)?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта. 26. октобар 2003. год.

6-7. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (4 поена) Сто целих позитивних бројева образује растућу аритметичку прогресију. Могу ли било која два од тих бројева бити узајамно прости?

2. (5 поена) У групи младића и девојака неки се међусобно познају, а неки не. Две проводаџике знају ко кога познаје. Једна проводаџика је изјавила:"Ја могу истовремено оженити све плавокосе момке тако да се сваки од њих ожени девојком коју познаје." Друга проводаџика каже:" А ја могу да удесим судбину свих плавуша: свака ће се удати за познатог јој момка!" Тај дијалог је слушао један љубитељ математике, па је казао: "У том случају могуће је учинити и једно и друго!". Да ли је он у праву?

3. (5 поена) Нађите све целе позитивне бројеве k, за које се могу наћи такви цели позитивни бројеви m и n да је $m(m+k)=n(n+1)$.

4. (6 поена) Који је најмањи број поља које треба означити на табли 15×15, тако да ловац (шаховски), постављен на било које поље, туче не мање од два означена поља? (Ловац туче по две дијагонале на чијем пресеку стоји; ловац, постављен на једно означено поље, туче и то поље.)

5. (7 поена) Дат је квадрат ABCD. Унутар квадрата лежи тачка O. Докажите да се збир углова OAB, OBC, OCD и ODA разликује од 180^0 за не више од 45^0.

6. (7 поена) По површини (спољашњости) једне кутије (облика правоуглог пралелопипеда) мили мрав. У почетку он стоји на једном врху (темену) паралелопипеда. Да ли је истина да се међу свим тачкама на површини кутије које су на највећем растојању од мрава, налази теме наспрамног угла? (Растојање међу тачкама, према схватању мрава, представља дужину најкраћег пута међу тим тачкама, идући по површини паралелопипеда.)

7. (8 поена) Играју двоје. Први има 1000 парних картица (2,4, ..., 2000), а други 1001 непарну (1,3, ..., 2001). Потезе вуку наизменично. Почиње први играч. Потез се састоји у следећем: играч који је на потезу извлачи и показује једну од својих картица, а други играч, пошто погледа ту картицу, извлачи и показује једну од својих картица; онај играч чији је број на картици већи записује себи један поен, а обе показане картице се одлажу на страну. Игра се 1000 потеза (и једна картица другог играча остаје неискоришћена). Који највећи број поена може гарантовати себи сваки играч (ма како играо његов супарник)?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта. 26. oktobap 2003. год.

10-11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (4 поена) У групи младића и девојака неки се међусобно познају, а неки не. Две проводаџике знају ко кога познаје. Једна проводаџика је изјавила:"Ја могу истовремено оженити све плавокосе момке тако да се сваки од њих ожени девојком коју познаје." Друга проводаџика каже:" А ја могу да удесим судбину свих плавуша: свака ће се удати за познатог јој момка!" Тај дијалог је слушао један љубитељ математике, па је казао:
"У том случају могуће је учинити и једно и друго!". Да ли је он у праву?

2. (4 поена) Докажите да се сваки позитиван број може представити у облику:

$$3^{u_1}\cdot 2^{v_1}+3^{u_2}\cdot 2^{v_2}+\ldots+3^{u_k}\cdot 2^{v_k},$$

где су $u_1>u_2>\ldots u_k\geq 0$ и $0\leq v_1<v_2<\ldots<v_k$ цели бројеви.

3. (6 поена) По површини (спољашњости) једне кутије (облика правоуглог пралелопипеда) мили мрав. У почетку он стоји на једном врху (темену) паралелопипеда. Да ли је истина да се међу свим тачкама на површини кутије које су на највећем растојању од мрава, налази теме наспрамног угла? (Растојање међу тачкама, према схватању мрава, представља дужину најкраћег пута међу тим тачкама, идући по површини паралелопипеда.)

4. (7 поена) Дат је троугао ABC. У њему је тачка H пресек висина, I центар уписане кружнице, O центар описане кружнице, K тачка пресека тетиве уписане кружнице са страницом BC. Зна се да су одсечци IO и BC паралелни. Докажи да су и одсечци AO и HK паралелни.

5. (7 поена) Играју двоје. Први има 1000 парних картица (2, 4, ..., 2000), а други 1001 непарну (1, 3, ..., 2001). Потезе вуку наизменично. Почиње први играч. Потез се састоји у следећем: играч који је на потезу извлачи и показује једну од својих картица, а други играч, пошто погледа ту картицу, извлачи и показује једну од својих картица; онај играч чији је број на картици већи записује себи један поен, а обе показане картице се одлажу на страну. Игра се 1000 потеза (и једна картица другог играча остаје неискоришћена). Који највећи број поена може гарантовати себи сваки играч (ма како играо његов супарник)?