25. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 22. фебруар 2004. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (3 поена). У троуглу ABC симетрала угла A, симетраала странице AB и висина из темена B секу се у једној тачки. Докажите да се симетрала угла A, симетрала странице AC и висина из тачке C такође секу у једној тачки.

2. (3 поена). Нађи све природне бројеве n за које се могу наћи n узастопних природних бројева чији је збир прост број.

3. а) (3 поена). Имамо три једнаке велике посуде. У једној се налази $3l$ сирупа, у другом $20\ l$ воде, а трећа је празна. Дозвољено је сипати из једне посуде сву течност у другу посуду или, пак, просути сву течност (нпр. у лавабо). Такође је дозвољено одабрати две посуде и доливати у једну од њих течност из треће све док се нивои течности у одабраним посудама не изједначе. Како се може добити 10 литара 30-процентног сирупа?

б) (2 поена). Исто питање, али ако сада имамо N литара воде. За које целобројно N је могуће добити 10 литара 30-процентног сирупа?

4. (5 поена). Природном броју $a>1$ дописан (приписан) је исти тај број и добијен је број b који је дељив са a^2. Нађите $\frac{b}{a^2}$. (Пронађите све одговоре и докажите да других нема).

5. (6 поена). Два десетоцифрена броја зовемо "суседним" ако се они разликују само у једној цифри на некој декадној позицији. На пример, бројеви 1234567890 и 1234507890 су "суседни". Колико је највише могуће написати десетоцифрених бројева тако да међу њима нема ниједног пара "суседних" бројева?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 22. фабруар 2004. год.

10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (4 поена). Дужи AB, BC и CD изломљене линије $ABCD$ су једнаке по дужини и додирују неку кружницу са центром O. Докажите да тачка додира те кружнице са дужи BC, тачка O и тачка пресека правих AC и BD леже на једној правој.

2. (4 поена). Природном броју $a>1$ дописан (приписан) је исти тај број и добијен је број b који је дељив са a^2. Нађите $\frac{b}{a^2}$. (Наведите све одговоре и докажите да других нема).

3. (4 поена). Обим конвексног четвороугла је 2004, а једна од дијагонала је 1001. Може ли друга дијагонала бити једнака 1? Једнака 2? Једнака 1001?

4. (5 поена). Познато је да се међу члановима неке аритметичке прогресије $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ налазе бројеви a_1^2, a_2^2, a_3^2. Докажите да су чланови те прогресије цели бројеви.

5. (5 поена). Два десетоцифрена броја зовемо "суседним" ако се они разликују у само једној цифри на некој декадној позицији. На пример, бројеви 1234567890 и 1234507890 су "суседни". Колико је највише могуће написати десетоцифрених бројева тако да међу њима нема ниједног пара "суседних" бројева?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.
Основна варијанта, 29. фебруар 2004. год.
8–9. разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (4 поена). Коначан аритметички низ (прогресија) састоји се из целих бројева, а његова сума је степен двојке. Докажите да је број чланова тога низа такође степен двојке.

2. (5 поена). Колики максималан број жетона можемо поређати на табли 8×8 тако да сваки буде на удару? (Ако поља шаховске табле x, y, z стоје једно до другог на дијагонали, жетон a стоји на пољу x, жетон b на пољу y и поље z је слободно, тада је жетон b под ударом.)

3. (5 поена). Курс акција компаније "Рогови и копита" повећава се или пада сваки пут за n процената, где је n фиксирани цео број, $0<n<100$ (курс се рачуна са неограниченом тачношћу). Постоји ли такво n за које курс акција може два пута узети (имати) исту вредност?

4. (6 поена). Две кружнице секу се у тачкама A и B. Њихова заједничка тангента (она која је ближа тачки B) додирује кружнице у тачкама E и F. Права AB сече праву EF у тачки M. На продужетку AM иза тачке M изабрана је тачка K тако да је $KM=MA$. Права KE по други пут сече кружницу, којој припада тачка E, у тачки C. Права KF по други пут сече кружницу, којој припада тачка F, у тачки D. Докажите да тачке C, D и A леже на истој правој.

5. (6 поена). Имамо билијарски сто у облику многоугла (не мора бити конвексан) код кога су ма које две суседне странице нормалне једна на другу. У теменима се налазе тачкасте рупе у које лоптица, кад ту дође, пропада. Из темена A с унутрашњим углом 90^0 полази тачкаста лоптица и креће се унутар многоугла, одбијајући се од његових страница по закону "упадни угао једнак је углу одбијања". Доказати да се она никада неће вратити у тачку A.

6. (7 поена). У почетку је на табли написан број 2004! (2004 факторијел, то јест број $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2004$). Два играча играју наизменично. Играч који је на реду ("на потезу") од написаног броја одузима неки природан број који је дељив са не више од 20 различитих простих бројева (али тако да разлика буде ненегативна), записује на табли ту разлику, а стари број брише. Побеђује онај играч који добије 0. Који од играча, онај који почиње или његов противник, може себи обезбедити победу и како он треба да игра?

25. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 29. фебруар 2004. године.

10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (4 поена). Курс акција компаније "Рогови и копита" повећава се или пада сваки пут за n процената, где је n фиксираани цео број, $0<n<100$ (курс се рачуна са неограниченом тачношћу). Постоји ли такво n за које курс акција може два пута узети (имати) исту вредност?

2. (6 поена). Имамо билијарски сто у облику многоугла (не мора бити конвексан) код кога сваки угао има цео број степени, а угао A има тачно 1 степен. У теменима се налазе тачкасте рупе у које лоптица, кад ту дође, пропада. Из темена A полази тачкаста лоптица и креће се унутар многоугла, одбијајући се од његових страница по закону "упадни угао једнак је углу одбијања". Доказати да се она никада неће вратити у тачку A.

3. (6 поена). Правоугаона пројекција тростране пирамиде на неку раван има максимално могућу површину.Докажите да је та раван паралелна или једној од страна пирамиде, или двема мимоилазним ивицама пирамиде.

4. (6 поена). У почетку је на табли написан број 2004! (2004 факторијел, то јест број $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2004$). Два играча играју наизменично. Играч који је на реду ("на потезу") од написаног броја одузима неки природан број који је дељив са не више од 20 различитих простих бројева (али тако да разлика буде ненегативна), записује на табли ту разлику, а стари број брише. Побеђује онај играч који добије 0. Који од играча, онај који почиње или његов противник, може себи обезбедити победу и како он треба да игра?

5. (7 поена). У равни су дати парабола $y=x^2$ и кружница, тако да имају тачно две зааједничке тачке: A и B. Показало се да се тангенте на кружницу и параболу у тачки A поклапају. Да ли ће се обавезно такође поклопити и тангенте на кружницу и параболу у тачки B?

6. Пред мађионичара се ставља шпил од 36 карата тако да им је полеђина горе. Он каже боју карте на врху (једну од четири: пик, каро, херц или треф), после чега се карта отвара, показује и ставља на страну. После тога мађионичар каже боју следеће карте, итд. Задатак мађионичара је да погоди боју што је могуће више пута. Стварно полеђине карата нису симетричне и играч види у ком од два положаја лежи карта на врху. Шпил је припремио подмићени (подплаћени) службеник. Службеник зна поредак карата у шпилу и, иако га не може променити, ипак може дошапнути (помоћи) мађионичару, намештајући полеђине карата овако или онако, сагласно договору. Може ли мађионичар, заахваљујући таквој помоћи, гарантовано обезбедити погађање боје:

а) (3 поена) код више од половине карата?

б) (5 поена) код не мање од 20 карата?