22. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Јаши, Румунија – 6. мај 2005.

1. Круг уписан у троугао ABC додирује AB у D и AC у E. Нека симетрале углова код темена C и B редом секу праву DE у тачкама X и Y, и нека је Z средиште странице BC. Доказати да је троугао XYZ једнакостраничан ако и само ако је $\angle A = 60°$. *(Бугарска)*

2. Наћи све просте бројe p за које је $p^2 - p + 1$ потпун куб. *(Албанија)*

3. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви, доказати неједнакост

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Када важи једнакост? *(Србија и Црна Гора)*

4. Нека је $n \geq 2$ природан број. Нека је S подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који не садржи два узајамно проста елемента, нити два елемента од којих један дели други. Колико највише елемената може имати скуп S? *(Румунија)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.