

**КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ  
СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ**

Будва, 17.04.2005.

1. Дат је низ  $x_1 = 1, x_2 = 4$  и  $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$  за  $n \geq 1$ . Наћи све природне бројеве  $m$  такве да је број  $3x_n^2 + m$  потпун квадрат за сваки природан број  $n$ .
2. Колико има 100-цифрених природних бројева у чијем се декадном запису појављују само непарне цифре, таквих да је разлика сваке две суседне цифре једнака 2?
3. (а) Доказати да постоји природан број који је дељив са 2005 и чији је збир цифара једнак 2.  
(б) Нека је  $x_n$  природан број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до  $n$  (на пример, важи  $x_1 = 1, x_2 = 12, x_3 = 123, \dots, x_{13} = 12345678910111213, \dots$ ). Доказати да у низу  $x_1, x_2, \dots$  постоји бесконачно много чланова који су дељиви са 2005.

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 25 поена.

**КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ  
СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ ЗА ММО**

**Београд, 31.05.2005. – први дан**

4. Нека је  $\alpha$  оштар угао, такав да важи  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ . Доказати да  $\alpha$  није облика  $r \cdot \pi$ , где је  $r$  рационалан број.
5. Дат је конвексан угао  $xOy$  и тачка  $M$  унутар њега. Доказати да постоји единствена тачка  $P$  у равни угла таква да, за сваку праву кроз  $M$  која сече краке угла (или продужетке кракова) у неким тачкама  $X$  и  $Y$ , угао  $\angle XPY$  није туп.
6. Наћи све полиноме са реалним коефицијентима, такве да за свако реално  $x$  важи  $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$ .

Време за рад 270 минута.  
Сваки задатак вреди 25 поена.

**КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ  
СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ ЗА ММО**

**Београд, 01.06.2005. – други дан**

7. Ако је  $T$  тежиште троугла  $ABC$ , доказати да важи

$$\frac{1}{\sin \angle TAC} + \frac{1}{\sin \angle TBC} \geq 4.$$

8. Нека су  $a, b, c$  позитивни реални бројеви за које је  $abc = 1$ . Доказати да важи

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1.$$

9. За  $n$  поља таблице  $n \times n$  кажемо да су *разбацана* ако никоја два нису из исте врсте или исте колоне. У свако поље те таблице уписан је природан број тако да је збир бројева у било којих  $n$  разбацаних поља исти и да ни једна врста или колона не садржи два једнака броја. Показало се да се бројеви дуж главне дијагонале налазе у растућем поретку и да је њихов производ најмањи од свих производа од по  $n$  разбацаних бројева.  
Доказати да се разбацани бројеви чији је производ највећи налазе дуж споредне дијагонале.

Време за рад 270 минута.  
Сваки задатак вреди 25 поена.

## РЕШЕЊА

1. Карактеристични полином датог рекурентног низа је  $x^2 - 4x + 1$ , чије су нуле  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ . Према томе, низ  $(x_n)$  је облика  $x_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n$  за неке константе  $A$  и  $B$ ; лако се налази да је  $A = -B = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ , тј.

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right).$$

Сада је  $3x_n^2 = \frac{1}{4} ((2 + \sqrt{3})^{2n} - 2 + (2 - \sqrt{3})^{2n})$ , па је

$$3x_n^2 + 1 = y_n^2 \quad \text{за} \quad y_n = \frac{1}{2} \left( (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right).$$

Приметимо да је број  $y_n$  цео. Дакле,  $m = 1$  задовољава услов задатка.

Претпоставимо да постоји  $m \neq 1$  које такође задовољава услов задатка. Тада је  $3x_n^2 + m = y_n^2 + (m-1) = z_n^2$  ( $z_n \geq 0$ ) потпун квадрат за све  $n$ , дакле  $m-1 = (z_n - y_n)(z_n + y_n)$  има бесконачно много делилаца, што је немогуће. Следи да је  $m = 1$  једино решење.

2. Означимо са  $x_k(n)$  редом број  $n$ -тоцифреног бројева чија је прва цифра  $k$  и сваке две суседне цифре се разликују за 2. Сваки такав број се добија додавањем цифре  $k$  слева ( $n-1$ )-цифреном броју са првом цифром  $k-2$  или  $k+2$  (ако су то заиста цифре), па имамо  $x_k(n) = x_{k-2}(n-1) + x_{k+2}(n-1)$ , при чему дефинишемо  $x_{-1}(n) = x_{11}(n) = 0$  и  $x_1(1) = x_3(1) = x_5(1) = x_7(1) = x_9(1) = 1$ . Индукцијом се лако показује  $x_1(n) = x_9(n)$  и  $x_3(n) = x_7(n)$  за све  $n$ . Означимо  $a_n = x_1(n)$ ,  $b_n = x_3(n)$  и  $c_n = x_5(n)$ . По претходном имамо

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1 \quad \text{и} \quad a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = a_n + c_n, \quad c_{n+1} = 2b_n.$$

Одавде је  $a_{n+1} = b_n = a_{n-1} + 2b_{n-2} = 3a_{n-1}$  и слично  $b_{n+1} = 3b_{n-1}$  и  $c_{n+1} = 3c_{n-1}$ . Сада из  $a_2 = 1$  и  $b_2 = c_2 = 2$  следи  $a_{100} = 3^{49}$  и  $b_{100} = c_{100} = 2 \cdot 3^{49}$ .

Тражених бројева има укупно  $2a_{100} + 2b_{100} + c_{100} = 8 \cdot 3^{49}$ .

3. (а) Довољно је доказати да  $401 \mid 10^n + 1$  за неко  $n$ , јер тада  $2005 \mid 10^{n+1} + 10$ . Имамо  $10^5 \equiv -250 \pmod{401}$ ,  $10^{10} \equiv -56$ ,  $10^{20} \equiv -72$ ,  $10^{25} \equiv -45$ ,  $10^{50} \equiv 20$  и  $10^{100} \equiv -1 \pmod{401}$ , па је довољно узети  $n = 100$ .

(б) За произвољно цело  $m \geq 0$  посматрајмо  $N = 10^{200m+99}$ ; по претходном је  $10N \equiv -1 \pmod{401}$ . За  $N \leq n < 10N - 2$  важи  $x_{n+2} = x_n(n+1)(n+2) = 100N^2x_n + 10N(n+1) + (n+2) \equiv x_n - (n+1) + (n+2) = x_n + 1 \pmod{401}$ , дакле  $x_{N+2k} \equiv x_N + k \pmod{401}$  за  $0 \leq k < N$ . Постоји  $k$  ( $0 \leq k < 2005$ ) такво да је  $k \equiv -x_n \pmod{401}$  и  $k \equiv 0 \pmod{5}$ , и тада по претходном важи  $x_{N+2k} \equiv 0 \pmod{2005}$ . Овако смо за свако  $m$  добили  $n$  са  $10^{200m+99} \leq m < 10^{200m+100}$  такво да  $2005 \mid x_n$ .

4. Довољно је показати индукцијом по  $n$  да је  $\operatorname{tg} n\alpha$  може приказати у облику

$\frac{p_n}{q_n}$ , где су  $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$  такви да важи  $p_n \equiv 3$  и  $q_n \equiv 4 \pmod{5}$  - одавде следи да је  $\operatorname{tg} n\alpha \neq 0$ , тј.  $n\alpha \neq m\pi$ , где је  $m \in \mathbb{Z}$ .

За  $n = 1$  је  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ , па тврђење важи. Нека је тврђење тачно за неки природан број  $n$ , тј. постоје  $p_n, q_n$  са горе поменутим својствима. Тада је  $\operatorname{tg}(n+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4p_n + 3q_n}{4q_n - 3p_n}$ . Ако је  $p_{n+1} = 2(4p_n + 3q_n)$ ,  $q_{n+1} = 2(4q_n - 3p_n)$ , следи  $p_{n+1}, q_{n+1} \in \mathbb{Z}$  и  $p_{n+1} = 2(4p_n + 3q_n) \equiv 2(4 \cdot 3 + 3 \cdot 4) \equiv 3 \pmod{5}$  и  $q_{n+1} = 2(4q_n - 3p_n) \equiv 2(4 \cdot 4 - 3 \cdot 3) \equiv 4 \pmod{5}$ , чиме је доказ индукцијом завршен.

5. Нека су  $A$  и  $B$  тачке на крацима  $x$  и  $y$  редом такве да је  $MA \parallel y$  и  $MB \parallel x$ .

Нека је  $X \in x$  и  $Y \in y$ . Ако тачка  $X$  тежи тачки  $A$  са стране тачке  $O$ , тачка  $Y$  иде у бесконачност дуж полуправе комплементне краку  $y$ , па угао  $\angle XPY$  тежи углу  $\angle MAP$ . Ако се  $X$  приближава  $A$  с друге стране, тачка  $Y$  иде у бесконачност дуж крака  $y$ , па угао  $\angle XPY$  тежи углу  $180^\circ - \angle MAP$ . Према томе, ниједан од угла  $\angle MAP$  и  $180^\circ - \angle MAP$  не сме бити туп, одакле следи  $\angle MAP = 90^\circ$ . Аналогно је  $\angle MBP = 90^\circ$ . Даље, тачка  $P$  мора бити ортоцентар троугла  $OAB$ .

С друге стране, ако је  $P$  ортоцентар троугла  $OAB$ , по Талесовој теореми је  $\frac{AX}{AM} = \frac{BM}{BY}$ , тј.  $AX \cdot BY = AO \cdot BO$ , па имамо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AX}) \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BY}) \\ &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BY} \\ &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} \\ &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO}) \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BO}) = PO^2 \geq 0,\end{aligned}$$

тј. заиста је  $\angle XPY \leq 90^\circ$ .

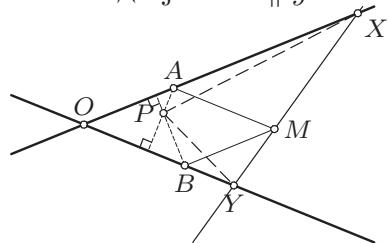
6. Из  $P(x)^2 = P(-x)^2 = P(x^2 + 1) - 1$  следи да је полином  $P(-x)$  идентички једнак  $P(x)$  или  $-P(x)$ .

Ако је  $P(x) = -P(-x)$  за све  $x$ , заменом  $x = 0$  добијамо  $P(0) = 0$ . Дефинишисмо низ  $x_0 = 0$  и  $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ . Индукцијом лако следи  $P(x_n) = x_n$  за све  $n$ , па како је низ  $(x_n)$  растући, следи да је  $P(x) = x$  за бесконачно много бројева  $x$ , дакле  $P(x) \equiv x$ , што очигледно задовољава дату једнакост.

Претпоставимо сада да је  $P(x) = P(-x)$ . Нека је  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Тада је полином  $P(x) - P(-x) = 2(a_1x + a_3x^3 + \dots)$  идентички нула, па је  $a_1 = a_3 = \dots = 0$ , тј.  $P(x)$  је полином по  $x^2$ . Следи да постоји полином  $Q$  такав да је  $P(x) = Q(x^2 + 1)$ .

Тада је  $Q((x^2 + 1)^2 + 1) = Q(x^2 + 1)^2 - 1$ , што се сменом  $x^2 + 1 = y$  своди на  $Q(y^2 + 1) = Q(y)^2 + 1$ , тј.  $Q$  задовољава исту полиномску једначину као  $P$ , али је мањег степена.

Настављајући овај поступак закључујемо да су сва решења полиноми  $x$ ,  $T(x)$ ,  $T(T(x))$ ,  $T(T(T(x)))$ , ..., где је  $T(x) = x^2 + 1$ .



7. Нека је  $P$  површина троугла  $ABC$ ,  $a, b, c$  редом странице троугла наспрам  $A, B, C$ , а  $t_a, t_b, t_c$  одговарајуће тежишне дужи.

Ако је  $A_1$  средиште дужи  $BC$ , имамо  $P = 2P_{A_1AC} = bt_a \sin \angle TAC$ . Аналогично је  $P = at_b \sin \angle TBC$ , па се тражена неједнакост своди на  $at_b + bt_a \geq 4P$ . Међутим, како мањој страници одговара већа тежишна дуж, заиста важи  $at_b + bt_a \geq at_a + bt_b \geq 2P + 2P = 4P$ .

8. Како је  $a^2 + 2 \geq 2a + 1$  итд, довољно је показати да важи  $L = \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1} \leq 1$ . То је с друге стране еквивалентно са

$$3 - 2L = \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} \geq 1. \quad (1)$$

Сменом  $a = \frac{x}{y}$ ,  $b = \frac{y}{z}$ ,  $c = \frac{z}{x}$  сводимо (1) на  $\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geq 1$ . Међутим, ова неједнакост одмах следи из Коши-Шварцове неједнакости:

$$\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geq \frac{(y+z+x)^2}{y(2x+y) + z(2y+z) + x(2z+x)} = 1.$$

Једнакост важи ако и само ако је  $a = b = c = 1$ .

9. Нека је  $x_{ij}$  број у  $i$ -тој врсти и  $j$ -тој колони. По услову задатка, ако је  $i \neq k$  и  $j \neq l$ , важи  $x_{ij} + x_{kl} = x_{il} + x_{kj}$ , тј.  $x_{ij} - x_{kj} = x_{il} - x_{kl}$ . За  $k = l = 1$  добијамо  $x_{ij} = x_{i1} + x_{1j} - x_{11}$ . Ако сада означимо  $a_i = x_{i1}$  и  $b_j = x_{1j} - x_{11}$ , имамо  $x_{ij} = a_i + b_j$ .

Даље, из услова минималности производа по главној дијагонали следи  $x_{ii}x_{jj} \leq x_{ij}x_{ji}$ , тј.  $(a_i + b_i)(a_j + b_j) \leq (a_i + b_j)(a_j + b_i)$ , што је еквивалентно са  $(a_j - a_i)(b_j - b_i) \geq 0$ , дакле  $a_j \geq a_i \Leftrightarrow b_j \geq b_i$ . Притом знамо да је  $x_{ii} < x_{jj}$  за  $i < j$ , па закључујемо да је  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  и  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ .

Нека су сада  $x_{1\sigma(1)}, \dots, x_{n\sigma(n)}$  разбацана поља са највећим производом, где је  $\sigma$  пермутација скупа  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Тада је  $x_{i\sigma(i)}x_{j\sigma(j)} \geq x_{i\sigma(j)}x_{j\sigma(i)}$  за  $i < j$ , тј.  $(a_i + b_{\sigma(i)})(a_j + b_{\sigma(j)}) \geq (a_i + b_{\sigma(j)})(a_j + b_{\sigma(i)})$ , што је еквивалентно са  $(a_j - a_i)(b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)}) \leq 0$ . Како је  $a_j > a_i$ , имамо  $b_{\sigma(j)} < b_{\sigma(i)}$ , тј.  $\sigma(j) < \sigma(i)$ . Према томе, низ  $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$  је опадајући, па мора бити  $\sigma(i) = n + 1 - i$ , одакле следи тврђење.