

46. Medjunarodna matematička olimpijada

Prvi dan

Merida, Meksiko, sreda 13. juli 2005.

Language: Serbian

Zadatak 1. Na stranicama jednakostraničnog trougla ABC izabrano je šest tačaka: A_1, A_2 na BC ; B_1, B_2 na CA i C_1, C_2 na AB . Ove tačke su temena konveksnog šestougla $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ čije stranice imaju jednake dužine. Dokazati da se prave A_1B_2 , B_1C_2 i C_1A_2 seku u jednoj tački.

Zadatak 2. Neka je a_1, a_2, \dots niz celih brojeva koji ima beskonačno mnogo kako pozitivnih tako i negativnih članova. Poznato je da za svaki prirodan broj n , brojevi a_1, a_2, \dots, a_n daju n različitih ostataka pri deljenju sa n . Dokazati da se svaki ceo broj pojavljuje u ovom nizu tačno jednom.

Zadatak 3. Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz \geq 1$. Dokazati da je

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Vreme rada: 4 časa i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena

46. Medjunarodna matematička olimpijada

Drugi dan

Merida, Meksiko, četvrtak 14. juli 2005.

Language: Serbian

Zadatak 4. Neka je niz a_1, a_2, \dots definisan sa

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Odrediti sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svakim članom ovog niza.

Zadatak 5. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao čije su stranice BC i AD jednake i nisu paralelne. Neka su E i F unutrašnje tačke stranica BC i AD redom, takve da je $BE = DF$. Prave AC i BD seku se u P , prave BD i EF seku se u Q , prave EF i AC seku se u R . Razmotrimo trouglove PQR koji se dobijaju za sve takve tačke E i F . Dokazati da sve opisane kružnice ovih trouglova imaju zajedničku tačku različitu od P .

Zadatak 6. Na matematičkom takmičenju učesnicima je dato 6 zadataka. Pokazalo se da je svaki par zadataka rešilo više od $\frac{2}{5}$ učesnika i da niko nije rešio svih 6 zadataka. Dokazati da postoje najmanje dva učesnika takva da je svaki od njih rešio tačno 5 zadataka.

Vreme rada: 4 časa i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena