46. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мерида, Мексико – среда, 13. јул 2005.

1. На страницама једнакостраничног троугла ABC изабрано је шест тачака: A_1, A_2 на BC; B_1, B_2 на CA и C_1, C_2 на AB. Ове тачке су темена конвексног шестоугла $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ чије странице имају једнаке дужине. Доказати да се праве A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 секу у једној тачки. *(Румунија)*

2. Нека је $a_1, a_2, \ldots$ низ целих бројева који има бесконачно много како позитивних тако и негативних чланова. Познато је да за сваки природан број n бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дају n различитих остатака при дељењу са n. Доказати да се сваки цео број појављује у овом низу тачно једном. *(Холандија)*

3. Нека су x, y и z позитивни реални бројеви такви да је $xyz \geqslant 1$. Доказати да је

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

(Јужна Кореја)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

46. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мерида, Мексико – четвртак, 14. јул 2005.

4. Нека је низ $a_1, a_2, \ldots$ дефинисан са

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Одредити све природне бројеве који су релативно прости са сваким чланом овог низа. *(Пољска)*

5. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ чије су странице BC и AD једнаке и нису паралелне. Нека су E и F унутрашње тачке страница BC и AD редом такве да је $BE = DF$. Праве AC и BD секу се у P, праве BD и EF секу се у Q, а праве EF и AC секу се у R. Размотримо троуглове PQR који се добијају за све такве тачке E и F. Доказати да описане кружнице свих ових троуглова имају заједничку тачку различиту од P. *(Пољска)*

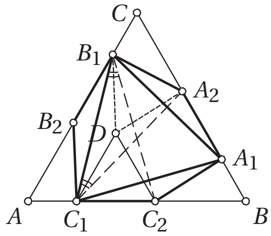
6. На математичком такмичењу учесницима је дато 6 задатака. Показало се да је сваки пар задатака решило више од $\frac{2}{5}$ учесника и да нико није решио свих 6 задатака. Доказати да постоје најмање два учесника таква да је сваки од њих решио тачно 5 задатака. *(Румунија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Посматрајмо тачку D унутар троугла ABC такву да је троугао C_1C_2D једнакостраничан. Тада је DC_1 једнако и паралелно са B_1B_2, па је $B_1B_2C_1D$ ромб и одатле $DB_1 = B_1B_2 = A_2B_1$; аналогно је $DA_2 = A_2B_1$, па је троугао DA_2B_1 једнакостраничан. Дакле, тачке A_2, B_1, C_1, C_2 леже на кругу са центром D, па имамо $\sphericalangle B_1C_1A_2 = \sphericalangle C_1B_1C_2 = \frac{1}{2}\sphericalangle C_1DC_2 = 30^\circ$. Слично је $\sphericalangle C_1A_1B_2 = \sphericalangle A_1C_1A_2 = \sphericalangle A_1B_1C_2 = \sphericalangle B_1A_1B_2 = 30^\circ$. Закључујемо да је троугао $A_1B_1C_1$ једнакостраничан и да се праве A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 секу у његовом центру.



2. Из услова задатка одмах следи да су сви чланови низа различити. Такође, ако је $d=|a_i-a_n|\geqslant n$ за неке $i,j\leqslant n$, онда се међу члановима $a_1,\dots,a_d$ налазе два која дају исти остатак по модулу d, што је немогуће. Према томе, $|a_i-a_j|\leqslant n-1$ за све $i,j\leqslant n$, тј. скуп $\{a_1,\dots,a_n\}$ се састоји од n узастопних целих бројева.

Ако се цео број k не појављује у низу, онда су сви чланови низа већи од k или су сви мањи од k, противно услову о бесконачно много позитивних и негативних чланова. Закључујемо да низ садржи све целе бројеве, и то сваки тачно једном.

3. По Коши-Шварцовој неједнакости је $(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\geqslant(x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}}+y^2+z^2)^2\geqslant(x^2+y^2+z^2)^2$, тј.
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$
Сабирањем ове неједнакости са аналогним за $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}$ и $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5}$ добијамо
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqslant\frac{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\leqslant 3,$$
што је еквивалентно траженој неједнакости.

Друго решење. Свођењем на заједнички именилац тражена неједнакост постаје
$$T_{5,5,5}+4T_{7,5,0}+T_{9,0,0}+T_{5,2,2}\geqslant T_{5,5,2}+2T_{5,4,0}+T_{6,0,0}+2T_{4,2,0}+T_{2,2,2},$$
уз уобичајену ознаку $T_{a,b,c}=x^ay^bz^c+y^az^bx^c+z^ax^by^c+x^az^by^c+y^ax^bz^c+z^ay^bz^c$. На основу неједнакости Мјурхеда и Шура и услова $xyz\geqslant 1$ важе неједнакости $T_{9,0,0}+T_{5,2,2}\geqslant 2T_{7,2,0}\geqslant 2T_{7,1,1}\geqslant 2T_{6,0,0}\geqslant T_{6,0,0}+T_{4,2,0}$, $T_{7,5,0}\geqslant T_{5,5,2}$, $2T_{7,5,0}\geqslant 2T_{6,5,1}\geqslant 2T_{5,4,0}$, $T_{7,5,0}\geqslant T_{6,4,2}\geqslant T_{4,2,0}$ и $T_{5,5,5}\geqslant T_{2,2,2}$, чијим сабирањем добијамо тражену.

4. Показаћемо да за сваки прост број p постоји m такво да $p\mid a_m$. За $p\in\{2,3\}$

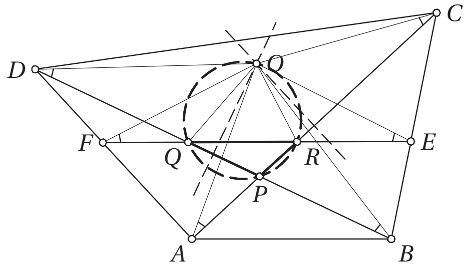
имамо $p \mid a_2 = 48$. С друге стране, за $p > 3$ по Фермаовој теореми имамо

$$6a_{p-2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 = 0 \pmod p,$$

тј. $p \mid a_{p-2}$, што завршава доказ.

Следи да је једини број са траженим особинама 1.

5. Означимо са O пресек симетрала дужи AC и BD. Приметимо да се тачке D, F, A при ротацији око тачке O за угао $\omega = \sphericalangle DOB$ сликају у тачке B, E, C. Следи да је $OE = OF$ и $\sphericalangle OFE = \sphericalangle OAC = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$, па су тачке F, A, R, O концикличне и $\sphericalangle ORP = 180^\circ - \sphericalangle OFA$. Слично су и тачке E, B, Q, O концикличне и $\sphericalangle OQP = 180^\circ - \sphericalangle OEB = \sphericalangle OEC = \sphericalangle OFA$. Сада важи $\sphericalangle ORP = 180^\circ - \sphericalangle OQP$, тј. тачка O лежи на описаном кругу троугла PQR, па је то тражена тачка.



6. Нека је било n такмичара, од којих је a_i решило тачно i задатака: тада је $a_0 + \cdots + a_5 = n$. Одредимо број N парова (C, P), где је C такмичар који је решио пар задатака P. Сваки од 15 парова задатака је решило бар $\frac{2n+1}{5}$ такмичара, одакле је $N \geqslant 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n + 3$. С друге стране, a_i такмичара је решило $\frac{i(i-1)}{2}$ парова, па је $6n+3 \leqslant N \leqslant a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 = 6n + 4a_5 - (3a_3 + 5a_2 + 6a_1 + 6a_0) \leqslant 6n + 4$. Према томе, $a_5 \geqslant 1$.

Претпоставимо да је $a_5 = 1$. Тада мора бити $N = 6n + 4$, што је могуће само ако је 14 парова задатака решило тачно $\frac{2n+1}{5}$ такмичара, а преостали пар (назовимо га *йосебним*) $\frac{2n+1}{5} + 1$ такмичара. Притом је $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, тј. победник је решио 5 задатака (рецимо да није решио задатак t), а сви остали по 4.

Сада нађимо број M_p парова (C, P) у којима P садржи дати задатак p. Нека је b_p број такмичара који су решили p. Тада је $M_t = 3b_t$ (сваки од b_t такмичара је решио три пара задатака који садрже t) и $M_p = 3b_p + 1$ за $p \neq t$ (победник је решио четири таква пара). С друге стране, сваки од пет парова који укључују p је решило $\frac{2n+1}{5}$ или $\frac{2n+1}{5}+1$ такмичара, па је $M_p = 2n+2$ ако посебни пар садржи p, односно $M_p = 2n+1$ у супротном. Овако је $M_t = 3b_t = 2n+1$ или $2n+2$, значи $2n+1 \equiv 0$ или $2 \pmod 3$. Али ако је $p \neq t$ задатак који није у посебном пару, имамо $M_p = 3b_p + 1 = 2n+1$, па је $2n+1 \equiv 1 \pmod 3$, што је контрадикција.