Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Први разред – А категорија

1. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла $\triangle ABC$ и нека је $AK \cap BC = \{M\}$. Наћи однос $CM : MB$.

2. Наћи све просте бројеве p, q и r, као и све природне бројеве n, такве да важи

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}.$$

3. Наћи сва решења једначине

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2004 \cdot x \cdot y \cdot z$$

у скупу целих бројева.

4. Нека је дат скуп $S = \{s, i, c, g\}$.
а) Колико има релација у скупу S које нису симетричне?
б) Колико има антисиметричних релација у скупу S?

5. Доказати или оповргнути: Међу произвољних 6 природних бројева увек је могуће наћи 3 тако да су свака 2 узајамно проста или 3 тако да сва 3 имају заједнички делилац већи од 1.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Други разред – А категорија

1. Нека је AB пречник круга k и нека се тетиве AD и BC тог круга секу у тачки E. Доказати да

$$AE \cdot AD + BE \cdot BC$$

не зависи од избора тачака C и D.

2. Нека је O центар круга описаног око конвексног четвороугла $ABCD$ и нека је E пресек дијагонала AC и BD. Ако су средишта дужи AD, BC и OE колинеарне тачке доказати да је тада испуњено или $AB = CD$ или је $\sphericalangle AEB = 90^\circ$.

3. Наћи сва решења (a, b) у скупу рационалних бројева једначине:

$$(a + b\sqrt{2})^2 = 11 + 14\sqrt{2}.$$

4. За које вредности реалног параметра m једначина

$$mx^2 + (2m + 1)x + (m - 3) = 0$$

има бар једно негативно решење?
Када има два негативна решења?

5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присутних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више отићи у заједничком друштву на ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак након састанка.
а) Да ли је могуће да је комисија која броји 7 чланова одржала укупно 10 састанака (тј. ручкова)?
б) Да ли је могуће да је комисија која броји 11 чланова одржала укупно 5 састанака (тј. ручкова)?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу $\triangle ABC$ тачка D је подножје висине из C, а тачка E подножје висине из D у $\triangle BCD$. Нека је F тачка дужи DE таква да је $DF : FE = BD : DA$. Доказати да су праве CF и AE узајамно нормалне.

2. У скупу реалних бројева решити једначину
$$x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12.$$

3. Колико решења у скупу ненегативних целих бројева има једначина
$$\left[\frac{100n}{199}\right] + \left[\frac{100n}{201}\right] = n?$$

4. Нека су a, b и c комплексни бројеви такви да су сва три корена једначине $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ модула 1. Доказати да су сва три корена једначине $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$, такође, модула 1.

5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присутних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више отићи у заједничком друштву на ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак након састанка.
а) Да ли је могуће да је комисија која броји 8 чланова одржала укупно 15 састанака (тј. ручкова)?
б) Да ли је могуће да је комисија која броји 13 чланова одржала укупно 7 састанака (тј. ручкова)?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Четврти разред – А категорија

1. Бисектриса унутрашњег угла у темену A троугла $\triangle ABC$ сече страницу BC у тачки K. Центри уписаног круга троугла $\triangle ABK$ и описаног круга троугла $\triangle ABC$ се поклапају. Наћи углове троугла $\triangle ABC$.

2. Наћи сва пресликавања $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, која су "на" (сурјекције) и за која важи:

$$f\big(f(x-y)\big) = f(x) - f(y) \qquad \text{за } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Дата је функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+x^n}, \qquad x \geqslant 0.$$

Одредити нуле и знак функције $f(x)$, испитати монотонију, а затим нацртати график функције $f(x)$.

4. Нека су a, b и c комплексни бројеви такви да су сва три корена једначине $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ модула 1. Доказати да су сва три корена једначине $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$, такође, модула 1.

5. У равни је задат n-тоугао чија темена имају целобројне координате, а странице су дужине $\sqrt{2005}$. За које $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 3)$ је то могуће?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Први разред – Б категорија

1. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла $\triangle ABC$ и нека је $AK \cap BC = \{M\}$. Наћи однос $CM : MB$.

2. Наћи све просте бројеве p, q и r, као и све природне бројеве n, такве да важи

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}.$$

3. Наћи троцифрен број $\overline{abc}$ ако је четвороцифрен број $\overline{abc1}$ три пута већи од четвороцифреног броја $\overline{2abc}$.

4. Колико има има дијагонала конвексног 15-тоугла које спајају по два његова темена између којих се (посматрано у оба могућа смера) налазе бар три друга темена?

5. Висина AD из темена A троугла $\triangle ABC$ дели страницу BC у односу $BD : DC = 3 : 1$. Ако је $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, доказати да је троугао $\triangle ABC$ правоугли.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број

$$A = \left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \right) \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

цео и наћи његову вредност.

2. Наћи све просте бројеве p, q и r, као и све природне бројеве n, такве да важи

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}.$$

3. Наћи све целе бројеве x и y за које важи

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 100.$$

4. За које вредности реалног параметра m једначина

$$mx^2 + (2m+1)x + (m-3) = 0$$

има бар једно негативно решење?
Када има два негативна решења?

5. У трапезу $ABCD$ краћа дијагонала AC нормална је на основицама $AB = a$ и $CD = b$. Ако је $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACB = 90^\circ$, наћи дужине кракова BC и AD.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су α, β и γ углови такви да важи $\beta = 60^\circ + \alpha$ и $\gamma = 60^\circ + \beta$. Доказати да је вредност израза

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha$$

цео број.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12.$$

3. Наћи све целе бројеве x и y за које важи

$$x^2 + 8xy + 25y^2 = 225.$$

4. Дат је паралелограм $ABCD$ са оштрим углом од 60°. Одредити однос дужина страница паралелограма $AB : AD$, ако је однос дужина дијагонала $AC : BD = \sqrt{19} : \sqrt{7}$.

5. У правилној тространој пирамиди, чија је ивица основе a, угао између ивица при врху једнак је α ($\alpha \leqslant 90^\circ$). Одредити површину пресека пирамиде и једне равни која садржи једну ивицу основе и нормална је на наспрамну бочну ивицу.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.12.2004.

Четврти разред – Б категорија

1. Три реална броја, различита од нуле, образују аритметички низ, а квадрати тих бројева у истом поретку, образују геометријски низ. Наћи количник тог геометријског низа.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12.$$

3. Дата је функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+x^n}, \qquad x \geqslant 0.$$

Одредити нуле и знак функције $f(x)$, испитати монотонију, а затим нацртати график функције $f(x)$.

4. Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)} \right).$$

5. Доказати да једначина

$$\sin\left(\tfrac{1}{7}\arccos x\right) = 1$$

нема реалних решења.

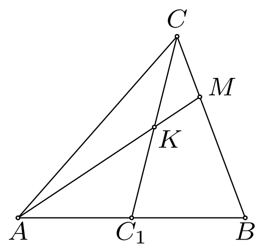
Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

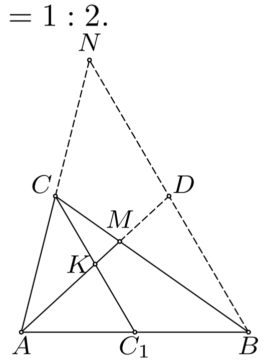
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. _Решење 1_: Тачка K је средиште дужи CC_1, те је $\overrightarrow{AK} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1}}{2}$. Вектори $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ су колинеарни, тј. $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AM}$ и како је C_1 средиште дужи AB, тј. $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, претходна једнакост добија облик $\lambda\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, односно $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AB}$. Како су тачке C, M и B колинеарне то је $\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = 1$, тј. $\lambda = \frac{3}{4}$, па је $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, односно $CM : MB = 1 : 2$.





Решење 2: Нека је N тачка на правој AC, таква да је $BN \parallel CC_1$ и нека је $AM \cap BN = \{D\}$. Тада је $\dfrac{CK}{KC_1} = \dfrac{ND}{DB}$, па је $ND = BD$ и $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AC}{CN}$, па је $AC = CN$. Дужи BC и AD су тежишне дужи троугла $\triangle ABN$, па је M тежиште тог троугла, одакле следи да је $CM : MB = 1 : 2$.

2. Претпоставимо да су прости бројеви p, q и r међусобно различити. Тада, из услова задатка имамо $pqr = n(pq + qr + rp)$, а како су p, q и r различити прости бројеви, они су и узајамно прости, те добијамо да $p \mid n$, $q \mid n$ и $r \mid n$, тј. $n = kpqr$, за неки природан број k. Међутим, тада добијамо $1 = k(pq + qr + rp)$, што је немогуће.
Претпоставимо да су тачно два од простих бројева p, q и r међусобно једнака. Без умањења општости можемо узети да је $p = q \neq r$. Тада добијамо $pr = n(p + 2r)$. Како су прости бројеви r и p узајамно прости добијамо $(r, p) = 1 \;\Rightarrow\; (r, p+2r) = 1$. Стога мора да $r \mid n$, односно $n = rl$ за неки природан број l. Како је $p+2r > 1$, то из $p = l(p+2r)$ добијамо $p+2r = p$, што је немогуће.
Дакле, $p = q = r$, што кад уврстимо у полазну једначину добијамо да је $p = 3n$, а p је прост број, те налазимо једино решење $(p, q, r, n) = (3, 3, 3, 1)$.

3. Једначина има тривијално решење $x = y = z = 0$. Покажимо да нема других решења. Претпоставимо супротно да има неко решење $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$. Без умањења општости можемо узети да је $x_0 \neq 0$ и нека је 2^k највећи степен броја 2 који дели x_0. Израз на десној страни је дељив са 4. Како тачан квадрат даје остатке 0 и 1 при дељењу са 4 добијамо да сва три броја, x_0, y_0, z_0, морају бити парни: $x_0 = 2x_1$, $y_0 = 2y_1$ и $z_0 = 2z_1$. Уколико ово уврстимо у полазну једнакост добијамо $4({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2) = 2004 \cdot 8x_1y_1z_1$, односно ${x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2 = 4008x_1y_1z_1$. Сада аналогним поступком добијамо и да су сви бројеви x_1, y_1, z_1 парни. Понављајући овај поступак $k+1$ пута добијамо да је број x_0 дељив са 2^{k+1}, што је у контрадикцији са претпоставком да је 2^k највећи степен броја 2 који дели x_0, чиме смо показали да једначина има само тривијално решење.

4. **а)** $|S| = 4$. Свака 2 елемента из $S \times S$ могу бити у релацији ρ или не бити у релацији. Стога је укупан број релација једнак: $2^{|S\times S|} = 2^{4\cdot 4} = 2^{16} = 65536$.

Код симетричних релација када одредимо да ли су у релацији елементи са главне дијагонале и изнад ње у таблици потпуно је одређено да ли су у релацији и елементи испод главне дијагонале. Стога је укупан број симетричних релација једнак $2^{4+3+2+1} = 2^{10} = 1024$, а укупан број несиметричних релација добијамо када претходни број одузмемо од укупног броја релација: $2^{16} - 2^{10} = 65536 - 1024 = 64512$.

б) За елементе са главне дијагонале имамо 2 могућности (или су у релацији или нису, тј. $a\,\rho\,a$ или $a \not\rho\, a$), а за сваки пар симетричних места у односу на главну дијагоналу, (a,b) и (b,a), имамо 3 могућности (или је $a\,\rho\,b$ и $b \not\rho\, a$, или је $b\,\rho\,a$ и $a \not\rho\, b$, или је $a \not\rho\, b$ и $b \not\rho\, a$). Стога је укупан број антисиметричних релација једнак $2^4 \cdot 3^{3+2+1} = 16 \cdot 729 = 11664$

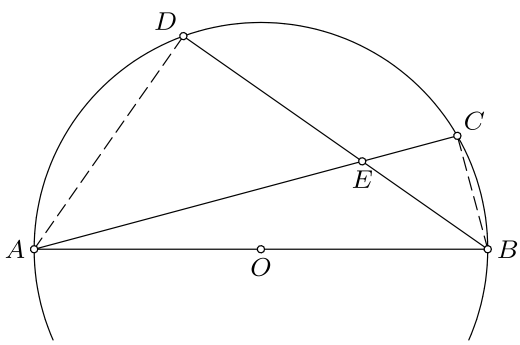
5. Оповргнућемо тврђење. Контрапример је шесторка $2\cdot 3$, $2\cdot 5$, $3\cdot 5$, $7\cdot 11$, $7\cdot 13$, $11\cdot 13$, која не задовољава ниједан услов задатка.

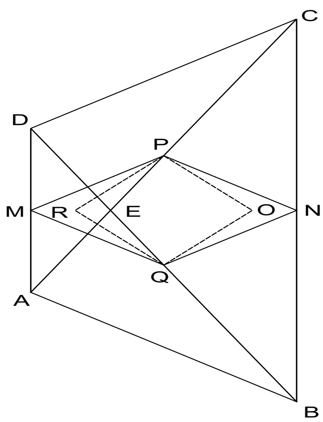
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – А категорија

1. Користимо да су троуглови $\triangle BCA$ и $\triangle ADB$ правоугли, као и потенцију тачке E у односу на круг k: $AE \cdot ED = BE \cdot EC$. Стога имамо да је $AE \cdot AD = AE^2 + AE \cdot ED = AC^2 + EC^2 + AE \cdot ED = AC^2 + EC^2 + BE \cdot EC = AC^2 + EC(EC + BE) = AC^2 + EC \cdot BC = AC^2 + (BC - BE) \cdot BC = AC^2 + BC^2 - BE \cdot BC$, па је $AE \cdot AD + BE \cdot BC = AB^2$.





2. Довољно је показати – Ако је $\sphericalangle AEB \neq 90^\circ$, онда је $AB = CD$. Нека је $\sphericalangle AEB \neq 90^\circ$.
Ако је $O \equiv E$, тада је $ABCD$ правоугаоник, па важи $AB = CD$.
Претпоставимо да је $O \not\equiv E$. Нека су M, N, P, Q средишта дужи AD, BC, AC, BD, редом, и нека је R пресек нормала из тачака P и Q редом на BD и AC.
Четвороуглови $MPNQ$ и $OPRQ$ су паралелограми, па се дужи MN, OR и PQ секу у једној тачки која их и полови. Пошто средиште дужи OE лежи на MN имамо да је $RE \parallel MN$. С друге стране, R је ортоцентар $\triangle PQE$, па је $RE \perp PQ$. Дакле, $MN \perp PQ$, тј. $MPNQ$ је ромб. Сада је лако показати да је $AB = 2PN = 2NQ = CD$.

3. Еквивалентним трансформацијама долазимо до: $a^2 + 2b^2 - 11 = (14 - 2ab)\sqrt{2}$. Сада имамо два случаја: ако је $2ab \neq 14$, добијамо да је $\sqrt{2} = \dfrac{a^2 + 2b^2 - 11}{(14 - 2ab)}$, што је немогуће, јер је $\sqrt{2}$ ирационалан број, а израз са десне стране рационалан. Друга могућност је да важи $2ab = 14$. Тада важи и $a^2 + 2b^2 = 11$, па је $(a - 2b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2} = 11 - 14\sqrt{2} < 0$. Ово је контрадикција, па задатак нема решења.

4. <u>*Решење 1*</u>: За $m = 0$ полазна једначина је линеарна једначина $x - 3 = 0$ и она има само позитивно решење ($x = 3$).
За $m \neq 0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D = 16m + 1 \geqslant 0$, што даје услов $m \geqslant \frac{-1}{16}$.
Оба решења су негативна, уколико важи $D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 < 0$ и $x_1 \cdot x_2 > 0$: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2m+1}{m} < 0$ за $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{m-3}{m} > 0$ за $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, те пресек услова $m \geqslant \frac{-1}{16}$ са ова два услова даје $m \in (3, +\infty)$.
Ако је тачно једно решење негативно онда је друго позитивно или 0. Једно решење је негативно, а друго позитивно, уколико важи $D \geqslant 0$ и $x_1 \cdot x_2 < 0$: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{m-3}{m} < 0$ за $m \in (0, 3)$ и пресек услова $m \geqslant \frac{-1}{16}$ са овим условом даје $m \in (0, 3)$. Једно решење је негативно, а друго 0, уколико важи: $D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 < 0$ и $x_1 \cdot x_2 = 0$: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2m+1}{m} < 0$ за $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{m-3}{m} = 0$, тј. за $m = 3$ (то је решење јер је $3 \geqslant \frac{-1}{16}$ и $3 \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$). Значи, једначина има тачно једно негативно решење за $m \in (0, 3]$.
Једначина има бар једно негативно решење за $m \in (0, +\infty)$, а два за $m \in (3, +\infty)$.

<u>*Решење 2*</u>: За $m = 0$ полазна једначина је линеарна једначина $x - 3 = 0$ и она има само позитивно решење ($x = 3$).
За $m \neq 0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D = 16m + 1 \geqslant 0$, што даје услов $m \geqslant \frac{-1}{16}$. Њена решења су дата формулом

$$x_{1,2} = \frac{-(2m+1) \pm \sqrt{16m+1}}{2m}.$$

Испитајмо када је $|2m + 1| < \sqrt{16m+1}$. Квадрирамо и добијамо неједначину $m^2 - 3m < 0$, што је испуњено за $m \in (0, 3)$. Онда је $|2m + 1| > \sqrt{16m+1}$ за $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.
Ако је $m \in [\frac{-1}{16}, 0)$ онда су и именилац ($2m < 0$) и бројилац ($-(2m + 1) - \sqrt{16m+1} < 0$) за оба решења негативни, па су оба решења позитивна.
Ако је $m \in (0, 3]$ онда је именилац позитиван ($2m > 0$), док је бројилац једном позитиван ($-(2m + 1) + \sqrt{16m+1} > 0$), а једном негативан ($-(2m + 1) - \sqrt{16m+1} < 0$), па је једно решење позитивно, а друго је негативно.
Ако је $m \in (3, +\infty)$ онда је именилац позитиван ($2m > 0$), док су бројиоци за оба решења негативни ($-(2m + 1) \pm \sqrt{16m+1} < 0$), па су оба решења негативна.
Једначина има бар једно негативно решење за $m \in (0, +\infty)$, а два за $m \in (3, +\infty)$.

5. **а)** Може. Није тешко конструисати пример. Означимо бројевима 1-7 чланове. Укупно има $\binom{7}{2} = 21$ парова, па ће ручкова бити максимално ако стално иду по два члана. Ако иду три ту се већ изгубе 2 будућа ручка, ако иду четири губи се 5 ручкова, са 5 губи се 9 итд. Ми треба да изгубимо 11 ручкова. То можемо нпр. ако на почетку иду $\{1,2,3,4,5\}, \{5,6,7\}$, а осталих 8 ручкова су сви са по два члана, који још парови фале:
$\{1,6\}, \{1,7\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{4,7\}$.

Напомена: Може на још један начин са 1×4, 3×3 и 6×2.

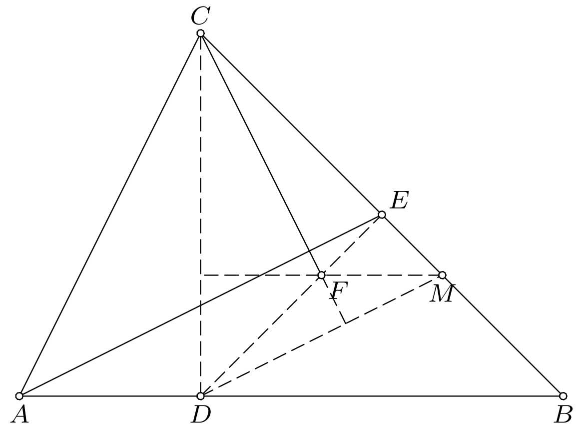
б) Не може. Наиме, парова има укупно $\binom{11}{2} = 55$. Претпоставимо да је могуће. Требало би да за сваки пар особа постоји тачно један ручак на коме су биле заједно. На ручку за k особа "потроши" се $\binom{k}{2}$ парова. Како је $\binom{5}{2} = 10$, а $5 \cdot 10 < 55$, јасно је да од тих 5 ручкова бар на једном од њих је морало бити присутно 6 или више особа (у супротном би остао неки пар чланова који није никад био заједно на ручку, тј. и након тих 5 ручкова било би могуће организовати још неки). Такође немогуће је да су преосталих 4 ручкова сви двочлани јер би опет остао неки пар који није био на ручку заједно (јер очигледно највише $\binom{10}{2} + 4 < 55$ различитих парова чланова је било заједно на ручку). Значи имамо бар један ручак са 6 и више особа, и један са 3 и више. Но та два ручка имају највише 1 заједничког члана. Онда значи имамо бар 5 особа са првог ручка које још нису ручале са бар 2 особе са другог ручка. За то је потребно је организовати бар још $5 \cdot 2 = 10$ ручкова да би свако од њих ручао са сваким. Контрадикција.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – А категорија

1. Нека је M тачка странице BC таква да је $DM \parallel AE$. Тада је $EM : MB = AD : DB = EF : FD$, па је $MF \parallel AB$, а онда и $MF \perp CD$. Како је и $DE \perp BC$, добијамо да је тачка F ортоцентар троугла $\triangle CDM$, па је $CF \perp DM$, а тиме и $CF \perp AE$.



2. За $x > 0$ су сви логаритми и степени дефинисани. Како је $3^{\log_2 \sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ и $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $t^2+t-12 = 0$ (смена $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$), чија су решења $t_1 = -4 < 0$ и $t_2 = 3$. Због $t > 0$ имамо $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$, па је $\log_2 x = 2$, тј. $x = 4$.

3. Нека су a и b редом остаци при дељењу $100n$ са 199 и 201. Задата једначина постаје $\frac{100n-a}{199} + \frac{100n-b}{201} = a$, што се након свођења на заједнички именилац своди на $n = 201a + 199b$.

С друге стране, за све $a = 0, 1, \ldots, 198$ и $b = 0, 1, \ldots, 200$, $n = 201a + 199b$ је решење једначине. Заиста, остаци при дељењу $100n = 20100a + 19900b$ са 199 и 201 су редом a и b, па сад лако проверавамо да је $\left[\frac{100n}{199}\right] + \left[\frac{100n}{201}\right] = n$. Како се за различите вредности бројева a и b добијају различите вредности за n, решења има онолико колико има парова (a, b), а ових има тачно $199 \cdot 201 = 39999$.

4. Нека су z_1, z_2 и z_3 корени једначине $x^3+ax^2+bx+c=0$, а w_1, w_2 и w_3 корени једначине $x^3+|a|x^2+|b|x+|c|=0$. Тада, користећи Виетове формуле, налазимо да важи

$$\begin{aligned}|a| &= |-a| = |z_1+z_2+z_3| \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3| = 3,\\ |b| &= |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| = |z_1z_2z_3|\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|\\ &= |\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3| = |\overline{z_1+z_2+z_3}| = |z_1+z_2+z_3| = |a|,\end{aligned}$$

као и $|z_1z_2z_3| = |-c| = |c| = 1$. Са друге стране, применом Виетових формула на другу једначину и чињеница $|a|=|b|$ и $|c|=1$, добијамо да је $w_1=-1$ решење исте. Дакле, друга једначина је еквивалентна једначини

$$x^3+|a|x^2+|a|x+1 = (x+1)(x^2+(|a|-1)x+1) = 0,$$

па су w_2 и w_3 корени квадратне једначине $x^2+(|a|-1)x+1=0$ (из Виетових формула имамо да је $w_2w_3=1$ – требаће нам касније). Међутим, како је $0 \leqslant |a| \leqslant 3$, то за дискриминанту ове једначине важи $D=(|a|+1)(|a|-3) \leqslant 0$. Ако је $|a|=3$ тада је $w_2=w_3=-1$, односно $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$. За $0 \leqslant |a| < 3$ је $D<0$ па имамо два конјуговано комплексна корена, $w_3 = \overline{w_2}$, и за њих важи $|w_2|^2 = w_2\overline{w_2} = w_2w_3 = 1$, као и $|w_3|^2 = w_3\overline{w_3} = w_3w_2 = 1$.
Тиме смо показали да је у сваком случају $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$.

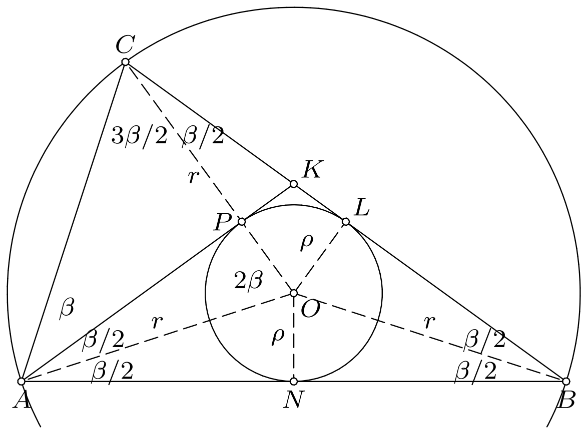
5. **а)** Може. Није тешко конструисати пример.Означимо бројевима 1-8 чланове. Укупно има $\binom{8}{2} = 28$ парова, па ће ручкова бити максимално ако стално иду по два члана. Ако иду три члана ту се већ изгубе 2 будућа ручка, ако иду четири губи се 5 ручкова, са пет чланова губи се 9 итд. Ми треба да изгубимо 13 ручкова. То можемо нпр ако иду $\{1,2,3,4,5\},\{5,6,7\},\{1,6,8\}$, а осталих 12 ручкова сви по 2 члана који још парови фале.
б) Не може. Наиме, парова има укупно $\binom{13}{2} = 78$. Претпоставимо да је могуће. Требало би да за сваки пар особа постоји тачно један ручак на коме су биле заједно. На ручку за k особа "потроши" се $\binom{k}{2}$ парова. Како је $\binom{5}{2} = 10$, а $7\cdot 10 < 78$, јасно је да од тих 7 ручкова бар на једном од њих је морало бити присутно 6 или више особа (у супротном би остао неки пар чланова који није никад био заједно на ручку, тј. и након тих 7 ручкова било би могуће организовати још неки). Такође, немогуће је да су преосталих 6 ручкова сви двочлани јер би опет остао неки пар који није био на ручку заједно (јер очигледно највише $\binom{12}{2}+6 < 78$ различитих парова чланова је било заједно на ручку). Значи имамо бар један ручак са 6 и више особа, и један са 3 и више. Но та два ручка имају највише 1 заједничког члана. Онда значи имамо бар 5 особа са првог ручка које још нису ручале са бар 2 особе са другог ручка. За то је потребно је организовати бар још $5\cdot 2 = 10$ ручкова да би свако од њих ручао са сваким. Контрадикција.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

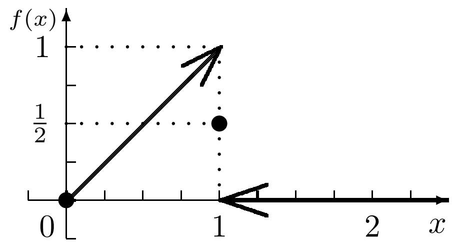
Четврти разред – А категорија

1. Означимо са O тачку која је истовремено и центар уписаног круга у $\triangle ABK$ (полупречника ρ) и центар описаног круга око $\triangle ABC$ (полупречника r). Нека су N, L и P, респективно, тачке у којима уписани круг у $\triangle ABK$ додирује странице AB, BK и KA. Тада су подударни правоугли троуглови $\triangle APO \cong \triangle ANO \cong \triangle BNO \cong \triangle BLO$ (хипотенузе су им једнаке R, катете r и угао наспрам веће странице је $90°$). Одатле имамо да је $\sphericalangle BCO = \sphericalangle KAO = \sphericalangle BAO = \frac{\beta}{2}$. Како је AK симетрала угла добијамо да је $\sphericalangle CAK = \sphericalangle KAb = \beta$. Угао $\sphericalangle AOC$ је централни за угао $\sphericalangle ABC = \beta$ па је $\sphericalangle AOC = 2\beta$. Из троугла $\triangle AOC$ налазимо да је $\sphericalangle ACO = 180° - \frac{7}{2}\beta$, али како је тај троугао једнакокрак ($AO = CO = R$) добијамо да је $\beta = 36°$. Одатле директно добијамо да су углови у троуглу $\triangle ABC$ једнаки $\sphericalangle ABC = 36°$, $\sphericalangle BCA = 72°$ и $\sphericalangle CAB = 72°$.



2. Означимо са $(*)$ услов задатка $f\big(f(x-y)\big) = f(x) - f(y)$ за $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Како је $f(x)$ "на", онда за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји неко $a \in \mathbb{R}$ такво да је $x = f(a)$. Сада из $(*)$ имамо $f(x) = f\big(f(a-0)\big) = f(a) - f(0) = x - f(0)$. Ако у $(*)$ заменимо $y = x$ добијамо да је $f(0) = 0$, па је $f(x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$.
Лако се проверава да ова функција задовољава једначину $(*)$.

3.
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} .$$



Нуле функције су $x = 0$ и сви бројеви $x > 1$. $f(x) > 0$ за $0 < x \leqslant 1$, а $f(x) < 0$ није никад. Функција $f(x)$ је растућа за $0 \leqslant x < 1$, у $x = 1$ има тачку прекида, а за $x > 1$ је константна.

4. Нека су z_1, z_2 и z_3 корени једначине $x^3+ax^2+bx+c=0$, а w_1, w_2 и w_3 корени једначине $x^3+|a|x^2+|b|x+|c|=0$. Тада, користећи Виетове формуле, налазимо да важи

$$|a| = |-a| = |z_1+z_2+z_3| \leqslant |z_1|+|z_2|+|z_3| = 3,$$

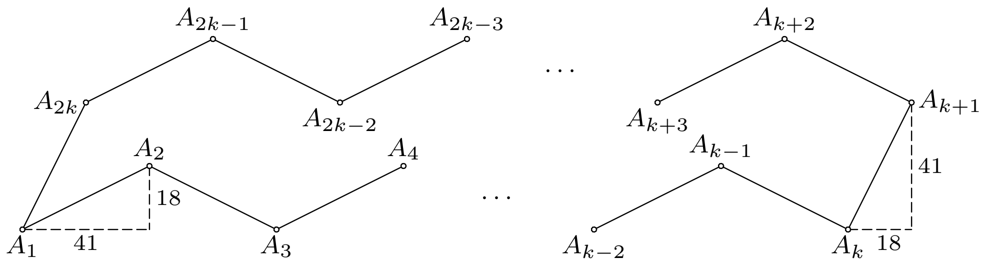
$$\begin{aligned}|b| &= |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| = |z_1z_2z_3|\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| \\ &= |\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3| = |\overline{z_1+z_2+z_3}| = |z_1+z_2+z_3| = |a|,\end{aligned}$$

као и $|z_1z_2z_3| = |-c| = |c| = 1$. Са друге стране, применом Виетових формула на другу једначину и чињеница $|a|=|b|$ и $|c|=1$, добијамо да је $w_1=-1$ решење исте. Дакле, друга једначина је еквивалентна једначини

$$x^3+|a|x^2+|a|x+1 = (x+1)(x^2+(|a|-1)x+1) = 0,$$

па су w_2 и w_3 корени квадратне једначине $x^2+(|a|-1)x+1=0$ (из Виетових формула имамо да је $w_2w_3=1$ – требаће нам касније). Међутим, како је $0\leqslant|a|\leqslant 3$, то за дискриминанту ове једначине важи $D=(|a|+1)(|a|-3)\leqslant 0$. Ако је $|a|=3$ тада је $w_2=w_3=-1$, односно $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$. За $0\leqslant|a|<3$ је $D<0$ па имамо два конјуговано комплексна корена, $w_3=\overline{w_2}$, и за њих важи $|w_2|^2 = w_2\overline{w_2} = w_2w_3 = 1$, као и $|w_3|^2 = w_3\overline{w_3} = w_3w_2 = 1$.
Тиме смо показали да је у сваком случају $|w_1|=|w_2|=|w_3|=1$.

5. Кад се померимо из једног темена у суседно промени се парност збира координата. Стога, ако је n непаран број, када кренемо из једног темена и обиђемо остала и вратимо се у полазно, парност збира координата би била промењена што није могуће, те за n непарно не постоји такав n-тоугао.
За n парно, 2005 треба да представимо као збир два квадрата. Како је $2004 = 5\cdot 401 = (2^2+1)\cdot(20^2+1)$, коришћењем формуле $(x^2+y^2)(a^2+b^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2 = (ax-by)^2+(ay+bx)^2$ добијамо представљања $2005 = 41^2+18^2 = 39^2+22^2$ (може се показати да су она и једина). Стога страницу дужине $\sqrt{2005}$ можемо добити као хипотенузу правоуглих троуглова са катетама 41 и 18 (или 39 и 22). Решење је дато као на слици:

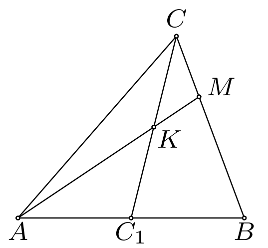


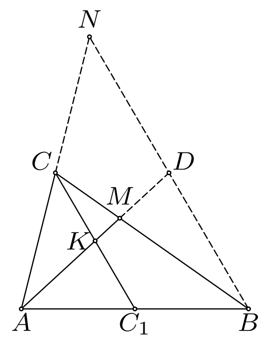
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – Б категорија

1. _Решење 1:_ Тачка K је средиште дужи CC_1, те је $\overrightarrow{AK} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1}}{2}$. Вектори $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ су колинеарни, тј. $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AM}$ и како је C_1 средиште дужи AB, тј. $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, претходна једнакост добија облик $\lambda\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, односно $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AB}$. Како су тачке C, M и B колинеарне то је $\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = 1$, тј. $\lambda = \frac{3}{4}$, па је $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, односно $CM : MB = 1 : 2$.





Решење 2: Нека је N тачка на правој AC, таква да је $BN \parallel CC_1$ и нека је $AM \cap BN = \{D\}$. Тада је $\dfrac{CK}{KC_1} = \dfrac{ND}{DB}$, па је $ND = BD$ и $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AC}{CN}$, па је $AC = CN$. Дужи BC и AD су тежишне дужи троугла $\triangle ABN$, па је M тежиште тог троугла, одакле следи да је $CM : MB = 1 : 2$.

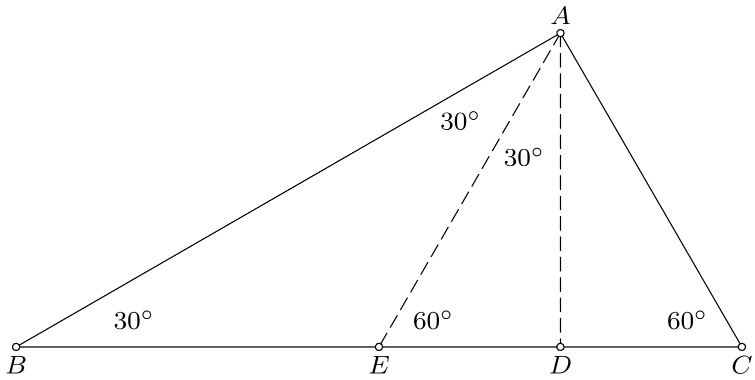
2. Претпоставимо да су прости бројеви p, q и r међусобно различити. Тада, из услова задатка имамо $pqr = n(pq + qr + rp)$, а како су p, q и r различити прости бројеви, они су и узајамно прости, те добијамо да $p \mid n$, $q \mid n$ и $r \mid n$, тј. $n = kpqr$, за неки природан број k. Међутим, тада добијамо $1 = k(pq + qr + rp)$, што је немогуће.

Претпоставимо да су тачно два од простих бројева p, q и r међусобно једнака. Без умањења општости можемо узети да је $p = q \neq r$. Тада добијамо $pr = n(p + 2r)$. Како су прости бројеви r и p узајамно прости добијамо $(r, p) = 1 \Rightarrow (r, p+2r) = 1$. Стога мора да $r \mid n$, односно $n = rl$ за неки природан број l. Како је $p+2r > 1$, то из $p = l(p+2r)$ добијамо $p+2r = p$, што је немогуће.
Дакле, $p = q = r$, што кад уврстимо у полазну једначину добијамо да је $p = 3n$, а p је прост број, те налазимо једино решење $(p, q, r, n) = (3, 3, 3, 1)$.

3. Важи: $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 1 = 3 \cdot (2 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$. Како се број $3c$ завршава јединицом, то је $c = 7$, те добијамо $1000a + 100b + 71 = 6000 + 300a + (3b+2) \cdot 10 + 1$. Како је b цифра ($0 \leqslant b \leqslant 9$), биће $2 \leqslant 3b + 2 \leqslant 29$. Број $3b+2$ се завршава цифром 7, па је $3b + 2 \in \{7, 17, 27\}$. Могуће је само $b = 5$. Сада је $1000a + 571 = 6000 + (3b+1) \cdot 100 + 71$. Како је и a цифра, биће $1 \leqslant 3a + 1 \leqslant 28$ и $3a + 1$ се завршава цифром 5, те је $3a + 1 = 25$, тј. $a = 8$.
Тражени број је 857.

4. Свако од темена не може бити спојено са самим собом и са суседних 6 темена (по 3 са сваке стране). Дакле, свако од 15 темена може бити спојено са преосталих 8 темена, а како на овај начин сваку дијагоналу бројимо 2 пута (код сваког од темена по једном) добијамо да је тражени број дијагонала једнак $\dfrac{15 \cdot 8}{2} = 60$.

5. Нека је AE симетрала угла $\sphericalangle BAD = 90^\circ - \sphericalangle ABC = 60^\circ$. Тада је $\triangle AEB$ једнакокраки троугао ($\sphericalangle BAE = 30^\circ = \sphericalangle ABE$) и $AE = BE$. Како је и $\triangle AED$ половина једнакостраничног троугла имамо да је $ED = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{BE}{2}$, односно $BD = \dfrac{3}{4}BC$, те је $CD = DE = \dfrac{1}{4}BC$. Сада из подударности $\triangle ADC \cong \triangle ADE$ добијамо $AC = AE$, а како је $AE = BE = \dfrac{1}{2}BC = EC$, налазимо да је троугао $\triangle AEC$ једнакостраничан. Према томе, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAC = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.



Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – Б категорија

1. Како је $9+4\sqrt{5}=4+4\sqrt{5}+5=(2+\sqrt{5})^2$, имамо да је
$A=\Big(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\Big)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=2\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=-2.$

2. Претпоставимо да су прости бројеви p, q и r међусобно различити. Тада, из услова задатка имамо $pqr=n(pq+qr+rp)$, а како су p, q и r различити прости бројеви, они су и узајамно прости, те добијамо да $p\mid n$, $q\mid n$ и $r\mid n$, тј. $n=kpqr$, за неки природан број k. Међутим, тада добијамо $1=k(pq+qr+rp)$, што је немогуће.
Претпоставимо да су тачно два од простих бројева p, q и r међусобно једнака. Без умањења општости можемо узети да је $p=q\neq r$. Тада добијамо $pr=n(p+2r)$. Како су прости бројеви r и p узајамно прости добијамо $(r,p)=1 \Rightarrow (r,p+2r)=1$. Стога мора да $r\mid n$, односно $n=rl$ за неки природан број l. Како је $p+2r>1$, то из $p=l(p+2r)$ добијамо $p+2r=p$, што је немогуће.
Дакле, $p=q=r$, што кад уврстимо у полазну једначину добијамо да је $p=3n$, а p је прост број, те налазимо једино решење $(p,q,r,n)=(3,3,3,1)$.

3. Решавањем полазне једначине по x налазимо $x=3y\pm2\sqrt{25-y^2}$, па је $|y|\leqslant5$ и $\sqrt{25-y^2}$ треба да буде цео број. Дакле, имамо да је $y\in\{0,\pm3,\pm4,\pm5\}$. Решења су:
$(x,y)\in\{(10,0),(-10,0),(-1,-3),(-17,-3),(1,3),(17,3),(-6,-4),$
$(-18,-4),(6,4),(18,4),(-15,-5),(15,5)\}$.

4. *Решење 1*: За $m=0$ полазна једначина је линеарна једначина $x-3=0$ и она има само позитивно решење ($x=3$).
За $m\neq0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D=16m+1\geqslant0$, што даје услов $m\geqslant\frac{-1}{16}$.
Оба решења су негативна, уколико важи $D\geqslant0$, $x_1+x_2<0$ и $x_1\cdot x_2>0$: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2m+1}{m}<0$ за $m\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,+\infty)$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{b}{a}=\dfrac{m-3}{m}>0$ за $m\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$, те пресек услова $m\geqslant\frac{-1}{16}$ са ова два услова даје $m\in(3,+\infty)$.
Ако је тачно једно решење негативно онда је друго позитивно или 0. Једно решење је негативно, а друго позитивно, уколико важи $D\geqslant0$ и $x_1\cdot x_2<0$: $x_1\cdot x_2=\dfrac{b}{a}=\dfrac{m-3}{m}<0$ за $m\in(0,3)$ и пресек услова $m\geqslant\frac{-1}{16}$ са овим условом даје $m\in(0,3)$. Једно

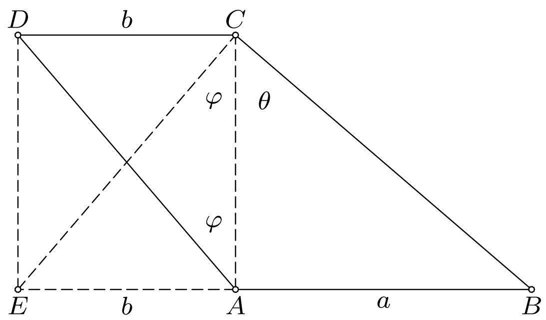
решење је негативно, а друго 0, уколико важи: $D \geqslant 0$, $x_1+x_2<0$ и $x_1 \cdot x_2 = 0$: $x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m+1}{m} < 0$ за $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{a} = \frac{m-3}{m} = 0$, тј. за $m = 3$ (то је решење јер је $3 \geqslant \frac{-1}{16}$ и $3 \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$). Значи, једначина има тачно једно негативно решење за $m \in (0, 3]$.
Једначина има бар једно негативно решење за $m \in (0, +\infty)$, а два за $m \in (3, +\infty)$.

<u>*Решење 2:*</u> За $m = 0$ полазна једначина је линеарна једначина $x - 3 = 0$ и она има само позитивно решење ($x = 3$).
За $m \neq 0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D = 16m + 1 \geqslant 0$, што даје услов $m \geqslant \frac{-1}{16}$. Њена решења су дата формулом

$$x_{1,2} = \frac{-(2m+1) \pm \sqrt{16m+1}}{2m}.$$

Испитајмо када је $|2m+1| < \sqrt{16m+1}$. Квадрирамо и добијамо неједначину $m^2 - 3m < 0$, што је испуњено за $m \in (0, 3)$. Онда је $|2m+1| > \sqrt{16m+1}$ за $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.
Ако је $m \in [\frac{-1}{16}, 0)$ онда су и именилац ($2m < 0$) и бројилац ($-(2m+1) - \sqrt{16m+1} < 0$) за оба решења негативни, па су оба решења позитивна.
Ако је $m \in (0, 3]$ онда је именилац позитиван ($2m > 0$), док је бројилац једном позитиван ($-(2m+1) + \sqrt{16m+1} > 0$), а једном негативан ($-(2m+1) - \sqrt{16m+1} < 0$), па је једно решење позитивно, а друго је негативно.
Ако је $m \in (3, +\infty)$ онда је именилац позитиван ($2m > 0$), док су бројиоци за оба решења негативни ($-(2m+1) \pm \sqrt{16m+1} < 0$), па су оба решења негативна.
Једначина има бар једно негативно решење за $m \in (0, +\infty)$, а два за $m \in (3, +\infty)$.

5. Нека је E подножје нормале из D на праву AB. Тада је $EACD$ правоугаоник, стога и због услова задатка је $\sphericalangle ECB = \sphericalangle ECA + \sphericalangle ACB = \varphi + \theta = \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACB = 90^\circ$. У правоуглом троуглу $\triangle CEB$ је $EC^2 = EB \cdot EA = (a+b) \cdot b$ и $CB^2 = EB \cdot AB = (a+b) \cdot a$, па је $AD = EC = \sqrt{b(a+b)}$ и $BC = \sqrt{a(a+b)}$.



Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

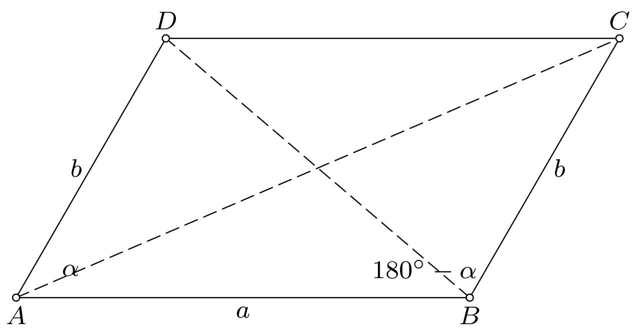
Трећи разред – Б категорија

1. Нека је $\operatorname{tg}\alpha = a$. Тада је $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) = \dfrac{a+\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+120^\circ) = \dfrac{a-\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}}$. Сада имамо $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a^2+a\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}} + \dfrac{a^2-3}{1-3a^2} + \dfrac{a^2-a\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}} = \dfrac{9a^2-3}{1-3a^2} = -3.$

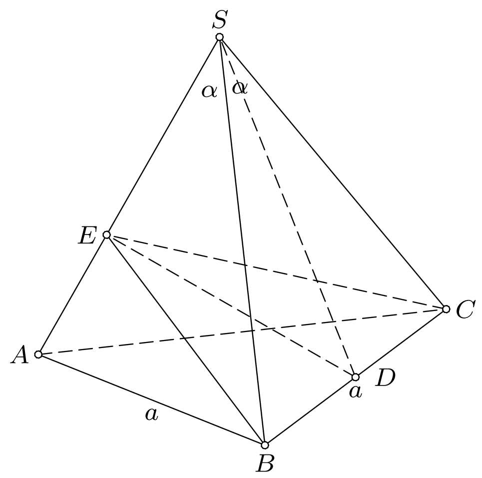
2. За $x > 0$ су сви логаритми и степени дефинисани. Како је $3^{\log_2\sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ и $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $t^2+t-12=0$ (смена $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$), чија су решења $t_1 = -4 < 0$ и $t_2 = 3$. Због $t > 0$ имамо $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$, па је $\log_2 x = 2$, тј. $x = 4$.

3. Решавањем полазне једначине по x налазимо $x = -4y \pm 3\sqrt{25-y^2}$, па је $|y| \leqslant 5$ и $\sqrt{25-y^2}$ треба да буде цео број. Дакле, имамо да је $y \in \{0, \pm3, \pm4, \pm5\}$. Решења су:
$(x,y) \in \{(15,0), (-15,0), (24,-3), (0,-3), (-24,3), (0,3), (25,-4),$
$(17,-4), (-25,4), (-17,4), (20,-5), (-20,5)\}$.

4. Означимо $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $BD = d_1 = \sqrt{7}\cdot k$, $AC = d_2 = \sqrt{19}\cdot k$, $\sphericalangle BAD = \alpha$ (за који треба да видимо да ли је 60° или 120°), $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$. Применимо косинусну теорему на троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$: ${d_1}^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$, ${d_2}^2 = a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)$, па како је $d_1 < d_2$ добијамо да је $\alpha = 60^\circ$. Дакле, ${d_1}^2 = a^2+b^2-ab$, ${d_2}^2 = a^2+b^2+ab$, па је $\dfrac{{d_2}^2}{{d_1}^2} = \dfrac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab} = \dfrac{19}{7}$, тј. $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1+\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)+1-\frac{a}{b}} = \dfrac{19}{7}$, одакле налазимо квадратну једначину $\frac{12}{7}\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{26}{7}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{12}{7} = 0$. Кад је решимо добијамо да је $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ или $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.



5. Означимо са A, B, C темена основе и са S врх пирамиде. Нека је D средиште ивице BC ($BD = \frac{1}{2}a$) и нека је E пресек равни која садржи BC и нормална је на AS. Тада је $BE \perp AS$, па из правоуглог троугла $\triangle BES$ имамо $BE = a\cos\frac{\alpha}{2}$. Висину DE добијамо из Питагорине теореме за $\triangle BDE$: $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$. Стога је $P_{\triangle BCE} = \dfrac{BC \cdot DE}{2} = \dfrac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$.



Друштво математичара Србије

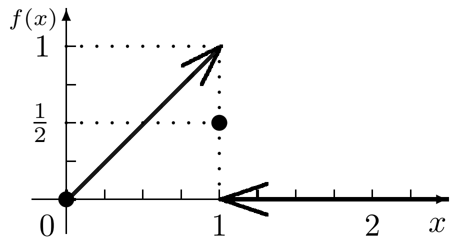
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – Б категорија

1. Нека су то бројеви a, b, c. Тада је $2b = a + c$ и $b^4 = a^2c^2$. Ако квадрирамо прву једначину и искористимо да је $b^2 = |ac|$, добијамо $a^2 + 2ac + c^2 = 4|ac|$.
Ако је $ac > 0$ добијамо $a^2 - 2ac + c^2 = 0$, па је $a = c$ и $a^2 = c^2$, дакле $q_1 = 1$.
Ако је $ac < 0$ добијамо једнакост $a^2 + 6ac + c^2 = 0$, одакле је $\frac{c}{a} = -3 \pm \sqrt{8}$. Како је $\frac{c^2}{a^2} = q^2 = (-3 \pm \sqrt{8})^2$ и $q > 0$ (јер су квадрати), биће $q_{2,3} = 3 \pm \sqrt{8}$.
Количник тог низа може бити $q_1 = 1$, $q_2 = 3 + \sqrt{8}$ или $q_3 = 3 - \sqrt{8}$.

2. За $x > 0$ су сви логаритми и степени дефинисани. Како је $3^{\log_2 \sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ и $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $t^2 + t - 12 = 0$ (смена $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$), чија су решења $t_1 = -4 < 0$ и $t_2 = 3$. Због $t > 0$ имамо $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$, па је $\log_2 x = 2$, тј. $x = 4$.

3.
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$



Нуле функције су $x = 0$ и сви бројеви $x > 1$. $f(x) > 0$ за $0 < x \leqslant 1$, а $f(x) < 0$ није никад. Функција $f(x)$ је растућа за $0 \leqslant x < 1$, у $x = 1$ има тачку прекида, а за $x > 1$ је константна.

4. Тражена гран. вредност је $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4n+5}\right) = \frac{1}{4}$.

5. Из $\frac{1}{7}\arccos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ следи $\arccos x = (\frac{7}{2} + 14k)\pi$. Та релација није испуњена ни за једно $k \in \mathbb{Z}$ будући да важи $(\frac{7}{2} - 14)\pi < 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi < \frac{7}{2}\pi$.