45. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Будва, 16.04.2005.

Први разред

1. Наћи све природне бројеве n са следећим својством: за сваки позитиван делилац d броја n, број $d+1$ дели $n+1$.

2. Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао. Кружница k над пречником AB сече странице AC и BC редом у тачкама M и N. Тангенте кружнице k у тачкама M и N секу се у тачки P. Ако је $CP = MN$, одредити $\sphericalangle ACB$.

3. Ако је $x+y+z=3$ и $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, доказати да је

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqslant xy+yz+zx.$$

4. На столу се налази c црвених, p плавих и b белих куглица. Два играча, A и B, играју игру у којој наизменично повлаче потезе. У сваком потезу играч узима са стола две или три куглице. Први узима куглице играч A. Побеђује онај играч после чијег потеза бар једна од три боје није више заступљена међу куглицама које су остале на столу. Одредити за које вредности c, p и b играч A има победничку стратегију.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

45. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Будва, 16.04.2005.

Други разред

1. Нека су a и b природни бројеви, $K = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ и $A = \dfrac{a+b}{2}$. Ако је $\dfrac{K}{A}$ природан број, доказати да је $a = b$.

2. У свако поље квадратне таблице 3×3 уписан је један од знакова $+$ или $-$. У једном потезу бира се једно поље и мења се знак у њему и њему суседним пољима (два поља су суседна ако имају заједничку страницу). Да ли се од произвољног почетног распореда знакова, у коначном броју потеза, може добити таблица у чијем је сваком пољу знак $-$?

3. Дат је троугао ABC. Нека је D подножје нормале из центра уписане кружнице I на BC. Нека DI сече уписану кружницу поново у тачки E. Права AE сече страницу BC у тачки F. Нека је дуж IO паралелна страници BC, где је O центар описане кружнице око троугла ABC. Ако су R и r, редом, полупречници описане и уписане кружнице троугла ABC, доказати да је $EF = 2(R-r)$.

4. Унутар кружнице k полупречника R налазе се кружне мрље. Површина сваке мрље је највише 1. Сваки полупречник кружнице k, као и свака њој концентрична кружница, сече највише једну мрљу. Доказати да је површина свих мрља мања од $\pi\sqrt{R} + \dfrac{1}{2}R\sqrt{R}$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

45. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Будва, 16.04.2005.

Трећи и четврти разред

1. Ако је $x > 0, y > 0, z > 0$, доказати да је

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geqslant \sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)}\,.$$

2. Дат је конвексан шестоугао. Свака од три праве, које спајају средишта наспрамних страница, дели шестоугао на два дела једнаке површине. Доказати да се те три праве секу у једној тачки.

3. Наћи све полиноме p са реалним коефицијентима за које важи $p(0) = 0$ и

$$f\big(f(n)\big) + n = 4f(n) \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

где је $f(n) = [p(n)]$.

4. На сваком пољу квадратне табле 2005×2005 налази се по један жетон. У сваком потезу дозвољено је уклонoти жетон са табле, ако је у том тренутку број њему суседних жетона паран и већи од 0. Под суседним жетонима подразумевамо жетоне који се налазе на пољима са бар једним заједничким теменом.

(а) Наћи најмањи могући број жетона n на који се може свести број жетона на табли.

(б) Ако је на табли остао тај минималан број од n жетона, доказати да међу њима нема суседних.

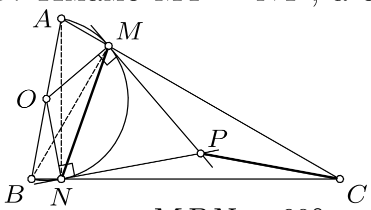
Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

РЕШЕЊА

1.1. Ако је n сложен број, онда постоји делилац d броја n такав да је $\sqrt{n} \leqslant d < n$. По условy задатка, $d \mid n-d$ и $d+1 \mid n-d$, па $d(d+1) \mid n-d$ и одатле $n \geqslant d(d+1)+d > d^2$, што је контрадикција.

Следи да је n прост број. Јасно је да сви прости бројеви задовољавају услов.

1.2. Означимо са O средиште странице AB. Имамо $MP = NP$, а осим тога важи $\sphericalangle MON = 2\sphericalangle MAN = 2(90^\circ - \sphericalangle ACB)$ и одатле $\sphericalangle MPN = 2\sphericalangle ACB$, па је тачка P центар описаног круга троугла MCN. Према томе, $MN = CP = MP = NP$, тј. троугао MNP је једнакостраничан и $\sphericalangle MPN = 60^\circ$, дакле $\sphericalangle ACB = 30^\circ$.



1.3. По А-Г неједнакости је $x^2 + 2\sqrt{x} =\geqslant 3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}\sqrt{x}} = 3x$ за $x \geqslant 0$. Сабирањем ове и аналогних неједнакости за y и z добијамо

$$x^2+y^2+z^2+2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \geqslant 3(x+y+z) = (x+y+z)^2,$$

тј. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqslant xy+yz+zx$. Једнакост се достиже само за $x=y=z=1$.

1.4. Играч A побеђује у првом потезу ако је $\min\{c,p,b\} \leqslant 3$.

Позицију у којој су $c,p,b \geqslant 4$ зовемо *веселом* ако је $c+p+b \equiv 2,3 \pmod 5$, а *жалосном* ако је $c+p+b \equiv 0,1,4 \pmod 5$. Претпоставимо да је почетна позиција весела. Ако играч A својим потезом остави мање од 4 куглице у некој боји, играч B побеђује у наредном потезу. У супротном, он узима $k \in \{2,3\}$ куглица, а играчу B остаје жалосна позиција. Како у таквој позицији има бар 14 куглица, B може да узме $5-k$ куглица тако да играчу A поново препусти веселу позицију. Овако B увек може да одигра потез након потеза противника. Према томе, за играча на потезу весела позиција је губитничка.

С друге стране, ако је почетна позиција жалосна, играч A је својим првим потезом своди на веселу и побеђује следећи наведену стратегију.

2.1. Како је $A \leqslant K < 2A$, мора бити $K = A$, што важи само за $a = b$.

Напомена. Тврђење важи и под претпоставком $a, b \in \mathbb{Q}$. Наиме, ако је $\frac{a}{b} = x$, онда је $n = \frac{K}{A} = \sqrt{\frac{2(x^2+1)}{(x+1)^2}}$ па добијамо $x = \frac{-n^2 \pm 2\sqrt{n^2-1}}{n^2-2}$, дакле n^2-1 је потпун квадрат, па је $n=1$.

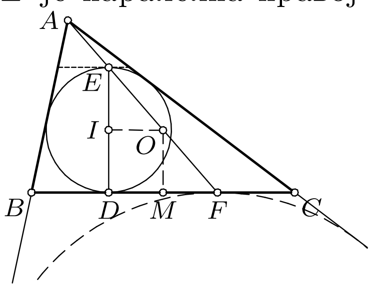
2.2. Колоне таблице означавамо са a, b, c, а врсте са $1, 2, 3$. Показаћемо да у сваком пољу можемо да променимо знак не мењајући остале. Одатле ће следити да је одговор “да”.

(1) Знак у пољу $a1$ (а слично и у пољима $a3, c1, c3$) можемо да променимо потезима на пољима $a1, a3, b3, c1, c2$;

(2) Знак у пољу $b1$ (а слично и у пољима $a2, c2, b3$) можемо да променимо потезима на пољима $a3, b2, b3, c3$;

(3) Знак у пољу $b2$ можемо да променимо потезима на пољима $a2, b1, b2, b3, c2$.

2.3. Тангента t на уписани круг у тачки E је паралелна правој BC. Зато хомотетија са центром у A која слика тачку E у F слика t у праву BC, па такође слика уписани круг у приписани круг k_a наспрам темена A. Следи да је F додирна тачка круга k_a и праве BC, а знамо да је тада $BD = FC = \frac{AB+BC-CA}{2}$, тј. средиште M дужи BC је уједно и средиште дужи DF. Из $IO \parallel DF$ и $MO \parallel DE$ следи да је IO средња линија у троуглу DEF. По Ојлеровој формули је $DF = 2IO = 2\sqrt{R^2 - 2Rr}$, и најзад $EF = \sqrt{DE^2 + DF^2} = \sqrt{(2r)^2 + 4(R^2 - 2Rr)} = 2(R - r)$.



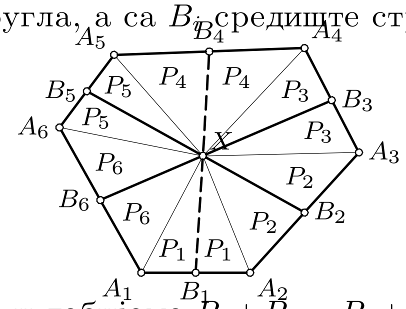
2.4. Ако нека мрља садржи центар круга O, онда не може бити других мрља, па тврђење тривијално важи. Претпоставимо да ниједна мрља не садржи центар. Нека су $d_1, d_2, \dots, d_n$ пречници мрља. По услову задатка је $\sum_i d_i \leqslant R$ и $\frac{\pi}{4} d_i^2 \leqslant 1$ за све i, тј. $d_i \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Укупна површина мрља је $P = \frac{\pi}{4} \sum_i d_i^2 \leqslant \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_i d_i = \frac{\sqrt{\pi}}{2} R$, што је мање од траженог $\pi\sqrt{R} + \frac{1}{2} R\sqrt{R}$ по А-Г неједнакости.

Друго решење. Доказаћемо тврђење за произвољне повезане мрље (не обавезно кружне). Нека је φ_i угаона ширина i-те мрље, а a_i њена највећа удаљеност од центра круга, при чему је $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqslant R$. Дакле, i-та мрља лежи у криволинијском трапезу површине $\frac{1}{2}(a_i^2 - a_{i-1}^2)\varphi_i$. Можемо да претпоставимо да мрља покрива цео овај криволинијски трапез (“надувавањем” мрље и смањивањем трапеза по потреби). По услову задатка је $\sum_i \varphi_i \leqslant 2\pi$ и $(a_i^2 - a_{i-1}^2)\varphi_i \leqslant 2$. Укупна површина мрља је

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_i (a_i^2 - a_{i-1}^2)\varphi_i &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_i \sqrt{(a_i^2 - a_{i-1}^2)\varphi_i} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sum_i (a_i^2 - a_{i-1}^2)} \sqrt{\sum_i \varphi_i} \leqslant \sqrt{\pi} \cdot R.
\end{aligned}$$

3.1. Пошто је неједнакост хомогена, довољно је доказати је за $x+y+z=1$: у том случају неједнакост се може записати као
$$f(x)+f(y)+f(z)\geqslant 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right),\quad \text{где је}\quad f(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t}}.\quad (*)$$
Испитајмо функцију f: лако налазимо да је $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{1-t}}+\frac{1}{2\sqrt{1-t}^3}$ строго растућа функција на $[0,1)$, што значи да је f конвексна на $[0,1)$, па $(*)$ следи на основу Јенсенове неједнакости.

3.2. Означимо са $A_1,\dots,A_6$ темена шестоугла, а са B_i средиште странице A_iA_{i+1} ($1\leqslant i\leqslant 6$, $A_7=A_1$). Нека је X пресечна тачка правих B_2B_5 и B_3B_6. Означимо $P_i = P_{XA_iB_i}=P_{XB_iA_{i+1}}$. Из услова да праве B_2B_5 и B_3B_6 полове површину шестоугла добијамо редом $P_6+P_1=P_3+P_4$ и $P_1+P_2=P_4+P_5$. Сабирањем ове две једнакости добијамо $P_2+P_3=P_5+P_6$, дакле, линија B_1XB_4 полови површину шестоугла, али како је и права B_1B_4 полови, следи да $X\in B_1B_4$.



3.3. За $\deg p=k>1$ имамо $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ и $4=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-x}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)}=\infty$, контрадикција. Следи да је $k=1$ и $p(x)=cx$. Даље, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=c$ и $4c-1=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(f(x))}{x}=c^2$, па је $c^2-4c+1=0$, тј. $c=2\pm\sqrt{3}$. Притом $c=2-\sqrt{3}$ отпада јер је тада $f(f(1))=0\neq 4f(1)-1$. Према томе, $p(x)=cx$ за $c=2+\sqrt{3}$. Остаје да покажемо да $p(x)=cx$ задовољава услове, тј. да је
$$[c[cn]]=4[cn]-n\quad \text{за све}\quad n\in\mathbb{N}.$$
За $m=[cn]$ имамо $[cm]=[4m-\frac{m}{c}]=4m-[\frac{m}{c}]-1$, али због $c(n-1)<m=[cn]<cn$ важи $[\frac{m}{c}]=n-1$, па тврђење одмах следи.

3.4. (а) Ако на табли остану два жетона, ниједан не може да се уклони. Зато је $n\geqslant 2$.

Са $Z_{x,y}$ означавамо жетон у x-тој врсти и y-тој колони. Са табле можемо да уклонимо све жетоне из прве две врсте уклањањем жетона $Z_{2,2}$, па $Z_{1,1}$, затим редом $Z_{1,3},Z_{1,4},\dots,Z_{1,2004}$, па $Z_{1,2}$, па $Z_{2,1}$, онда редом $Z_{2,3},Z_{2,4},\dots,Z_{2,2003}$, и најзад $Z_{1,2005}$, $Z_{2,2004}$ и $Z_{2,2005}$. Настављајући овај поступак уклањамо по две врсте и колоне док не остане само 9 жетона поређаних у квадрат 3×3. Од тих 9 жетона сада уклањамо прво централани, затим четири угаона, па два несуседна од преосталих, остављајући тако само два жетона.

(б) Број парова суседних жетона приликом сваког потеза не мења парност. Како је он у почетку паран (сваком пару одговара други пар, симетричан њему у односу на центар табле), он на крају не може бити 1, тј. последња два жетона не могу бити суседна.