26. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 17. октобар 2004. год.

8–9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (*3 йоена*). Могу ли се цели бројеви од 1 до 2004 распоредити у неки низ, тако да збир ма којих 10 узастопних буде дељив са 10?

2. (*4 йоена*). У кутији се налази 111 куглица црвене, плаве, зелене и беле боје. Ако се, не гледајући у кутију, извади из ње 100 куглица, онда ће међу њима обавезно бити 4 куглице различитих боја. Колико најмање куглица морамо извући, не гледајући у кутију, да би се међу њима сигурно нашле 3 куглице различитих боја?

3. (*4 йоена*). Имамо неколико градова, од којих су неки повезани аутобуским линијама (без међустаница). Из ма којег града може се стићи у ма који други (уз могуће преседање). Ивановић је купио по једну возну карту за сваку маршруту (тј. може проћи по њој само једном на било коју страну). Петровић је купио n возних карата за сваку маршруту. Ивановић и Петровић су пошли из града A. Ивановић је искористио све своје карте, нове карте није куповао и стигао је у град B. Петровић је неко време путовао са купљеним картама, нашао се у граду X и не може из њега поћи док не купи нову карту. Доказати да је X или град A, или град B.

4. (*5 йоена*). Дати су кружница и права која је не сече. Како помоћу шестара и лењира конструисати квадрат чија ће два суседна темена бити на кружници, а друга два темена - на датој правој (ако се зна да такав квадрат постоји)?

5. (*5 йоена*). Колико има различитих начина да се број 2004 разложи на целе позитивне сабирке, који су приближно једнаки? Сабирака може бити један или неколико. Бројеве називамо приближно једнаким ако њихова разлика није већа од 1. Начини, који се разликују само по редоследу сабирака, сматрају се једнаким.

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло

Припремна варијанта, 17. октобар 2004. год.

10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (*3 поена*). Три кружнице пролазе кроз тачку X. Тачке A, B, C - су тачке њиховог пресека, различите од X. Нека је A' друга пресечна тачка праве AX и кружнице описане око троугла BCX. Тачке B' и C' одређене су аналогно. Докажите да су троуглови ABC', AB'C и A'BC слични.

2. (*3 поена*). У кутији се налази 100 куглица беле, плаве и црвене боје. Ако се, не гледајући у кутију, извади из ње 26 куглица, онда ће међу њима обавезно бити 10 куглица исте боје. Колико најмање куглица морамо извући, не гледајући у кутију, да би се међу њима сигурно нашло 30 куглица исте боје?

3. (*4 поена*). Дата су два полинома позитивног степена, $P(x)$ и $Q(x)$, при чему важе идентитети $P(P(x))= Q(Q(x))$ и $P(P(P(x)))=Q(Q(Q(x)))$. Да ли тада обавезно важи идентитет $P(x)= Q(x)$?

4. (*4 поена*). Колико има различитих начина да се број 2004 разложи на целе позитивне сабирке, који су приближно једнаки? Сабирака може бити један или неколико. Бројеве називамо приближно једнаким ако њихова разлика није већа од 1. Начини, који се разликују само по редоследу сабирака, сматрају се једнаким.

5. (5 поена). За које N се бројеви од 1 до N могу поређати у другачијем редоследу, тако да аритметичка средина ма које групе од два или више узастопних бројева не буде цео број?

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 24. октобар 2004. год.

8–9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (*4 йоена*). Троугао ћемо звати рационалним ако су мерни бројеви свих његових углова рационални бројеви. Тачку у троуглу зваћемо рационалном ако, спојивши је са теменима, добијемо три рационална троугла. Докажите да у сваком оштроуглом рационалном троуглу постоје бар три рационалне тачке.

2. (*5 йоена*). Кружница, уписана у троугао ABC, додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама A', B' и C'. Знамо да је AA'=BB'=CC'. Да ли је тада обавезно троугао ABC једнакостраничан?

3. (*6 йоена*). Колико се највише коња може поставити на шаховску таблу 8x8, тако да сваки туче не више од 7 осталих.

4. (*6 йоена*). Васа је замислио два позитивна броја x и y. Записао је бројеве $x+y$, $x-y$, xy и x/y и показао Петру, али му није рекао, који број је у којој операцији добијен. Докажите да Петар може једнозначно да одреди x и y.

5. (*7 йоена*). У троуглу ABC на страници BC означена је тачка K. У троуглове ABK и ACK уписане су кружнице, при чему прва додирује страницу BC у тачки M, а друга у тачки N. Докажите да је тада $BM \cdot CN > KM \cdot KN$.

6. (*8 йоена*). Двојица деле комад (парче) сира. На почетку први дели сир на два комада, затим други сваки од тих комада дели на два дела и тако даље, док се не добије 5 комада. Затим први за себе узима један комад, онда други узима један од преосталих комада, затим опет први и тако све док има сира. За сваког играча утврдите колико највише сира он може осигурати за себе, без обзира како игра његов противник.

7. (*8 йоена*). Нека су A и B два правоугаоника. Од правоугаоника који су подударни са A, састављен је правоугаоник сличан са B. Доказати да се од правоугаоника подударних са B може саставити правоугаоник сличан са A.

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло

Основна варијанта, 24. октобар 2004. год.

10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (*5 йоена*). Функције f и g дефинисане су на целој бројевној правој и узајамно су инверзне, тј. $g(f(x))=f(g(x))=y$ за свако x и y. Познато је да се f може приказати у облику збира линеарне и периодичне функције (тј. $f(x)=kx+h(x)$, где је k број, а h - периодична функција). Докажите да се g такође може представити у таквом облику. (Функција h назива се периодичном ако се може наћи такав број $d\neq 0$, тако да је $h(x+d)=h(x)$ за сваки број x).

2. (*5 йоена*). Двојица играју следећу игру. Имамо гомилу каменчића. Први играч, кад је на потезу, узима 1 или 10 каменчића. Други играч, при сваком свом потезу, узима m или n каменчића. Предмете узимају наизменично, а почиње први. Губи онај који не може да начини потез (да узме каменчић). Зна се да при ма којој почетној количини каменчића, први играч увек може да игра тако да победи. Какви могу бити бројеви m и n?

3. (*5 йоена*). Васа је замислио два позитивна броја x и y. Затим је записао бројеве $x+y$, $x-y$, xy и x/y и показао Петру, али му није рекао који број је у којој операцији добијен. Докажите да Петар може једнозначно да одреди x и y.

4. (*6 йоена*). Кружница с центром I лежи у кружници са центром O. Нађите геометријско место центара кружница описаних око троуглова IAB, где је AB тетива веће кружнице која додирује мању кружницу.

5. (*7 йоена*). Нека су А и В два правоугаоника. Од правоугаоника који су подударни са А, састављен је правоугаоник сличан са В. Доказати да се од правоугаоника подударних са В може саставити правоугаоник сличан са А.

6. (*8 йоена*). Дат је цео број n, који није дељив ни са 2 ни са 3. Троугао ћемо звати разрешивим ако мера сваког његовог угла има облик $\frac{m\cdot 180^\circ}{n}$ (m помножити са 180 степени, па поделити са n), где је m - цео број. Једнаким ћемо сматрати разрешиве троугле са једнаким угловим (тј. сличне троуглове). У почетку је дат један разрешиви троугао. Сваког минута један од постојећих троуглова разрезује се на два разрешива тако да су после резања сви добијени троуглови неједнаки (тј. нису слични). После неког времена показало се да ниједан од троуглова није могуће тако разрезати. Докажите да су до тог момента међу добијаним деловима постојали сви могући разрешиви троуглови.

7. (*8 йоена*). Углови AOB и COD доводе се до поклапања ротацијом. У њих су уписане кружнице које се секу у тачкама E и F. Докажите да су углови AOE и DOF једнаки.