26. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.
Припремна варијанта. 20. фебруар 2005. год.

8—9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (3 поена) Истовремено из села А и Б су кренули Ана и Бора у сусрет једно другоме (њихове брзине су константне, али не и нужно међусобно једнаке). Да је Ана кренула 30 минута раније, они би се срели 2 km ближе селу Б. Да је Бора кренуо 30 минута раније, сусрет би се десио ближе селу А. За колико ближе?

2. (4 поена) Нека је N било који природан број. Доказати да се у десетичном запису било броја N било броја 3N, налази једна од цифара 1, 2, 9.

3. (5 поена) У првом реду шаховске табле се налази 8 истоветних црних дама, а у последњем реду 8 истоветних белих дама. За који минималан број потеза беле даме могу заменити места са црним дамама? Бели и црни потезе вуку наизменично, по једна дама за један потез. Дама се креће по хоризонтали, по вертикали или по дијагонали за ма који број поља, ако се на путу не налазе друге даме.

4. (5 поена) Дат је квадрат ABCD, а M и N су средишта страница BC и AD респективно. На продужетку дијагонале AC, преко тачке A, одабрана је тачка K. Дуж KM сече страницу AB у тачки L. Докажите да су углови KNA и LNA једнаки.

5. (5 поена) У неком граду све улице иду или правцем север - југ или правцем исток-запад. Возач аутомобила се провозао тим градом, направивши тачно сто скретања на лево. Колико скретања на десно је при томе могао направити, ако ни једно место није прошао два пута и на крају се вратио на место поласка? (Све улице су двосмерне.)

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 20. фебруар 2005. год.

10—11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

1. (3 поена) На координатној равни је нацртано четири графика функкције облика $y = x^2 + ax + b$, где су a и b бројевни коефицијенти. Знамо да постоје тачно 4 тачке пресека, при чему се у свакој секу тачно два графика. Доказати да је збир највеће и најмање од апсциса тачака пресека једнака збиру преостале две апсцисе.

2. (4 поена) Сви природни бројеви су записани један за другим без размака на бесконачној траци: 1234567891011121314... Затим су траку разрезали на делове од по седам цифара у сваком делу. Доказати да се ма који седмоцифрени број

    а) налази бар на једном делу (3 поена);

    б) налази на бесконачно много делова (1 поен).

3. (4 поена) Дат је квадрат ABCD, а M и N су средишта страница BC и AD респективно. На продужетку дијагонале AC иза тачке A одабрана је тачка K. Дуж KM сече страницу AB у тачки L. Докажите да су углови KNA и LNA једнаки.

4. (4 поена) У неком граду све улице иду или правцем север - југ или правцем исток-запад. Аутомобилиста се провозао тим градом, направивши тачно сто скретања на лево. Колико је при том могао направити скретања на десно, ако ни једно место није прошао два пута и на крају се вратио на место поласка? (Све улице су двосмерне).

5. (5 поена) Збир неколико позитивних бројева једнак је 10, а збир њихових квадрата је већи од 20. Доказати да је збир кубова тих бројева већи од 40.

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 27. фебруар 2005. год.

8—9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) На графику квадратног тринома са целобројним коефицијентима уочене су две тачке са целобројним координатама. Докажите да, ако је растојање међу њима изражено целим бројем, онда је дуж која их спаја паралелна са апсцисном осом.

2. (5 поена) Висине AA' и BB' троугла ABC секу се у тачки H. Тачке X и Y су редом средишта дужи AB и CH. Докажите да су праве XY и A'B' међусобно нормалне.

3. На бројчанику исправног сата барона Минхаузена постоје само велика казаљка, мала казаљка и секундара, а све цифре и подеоци су избрисани. Барон тврди да он по том сату може да одређује тачно време, јер, према његовом посматрању, на њему се током дана (од 8.00 до 19.59) не понавља два пута исти распоред казаљки. Да ли је тврђење барона тачно? (Казаљке имају различиту дужину, а крећу се равномерно).

4. Папирни правоугаоник са квадратном мрежом, величине 10×12, неколико пута је пресавијан по линијаама мреже тако да је добијен квадратић 1×1. Колико се парчића може добити пошто се тај квадратић расече по дужи која спаја
   а) средишта две његове наспрамне ивице (2 поена);
   б) средишта две његове суседне ивице (4 поена)?
   (Нађите сва решења и докажите да других нема).

5. (6 поена) Конструктор се састоји из гарнитуре (комплета) правоуглих паралелепипеда. Сви се они могу сместити (сложити) у једну кутију такође облика правоуглог паралелепипеда. У шкартираном (дефектном) комплету код сваког паралелепипеда једна од ивица била је мања од стандардне. Може ли се тврдити да се код кутије, у коју се ставља комплет, такође може смањити једна од ивица? (Паралелепипеди се слажу у кутију тако да су њихове ивице паралелне ивицама кутије).

6. (6 поена) Тома и Сима деле гомилу од 25 новчића с вредностима 1, 2, 3, ... 25 алтина. При сваком потезу један од њих бира новчић из гомиле, а други говори коме да се да тај новчић. Први бира Тома, а потом онај који има тренутно више алтина, а ако имају једнако, онда онај који је бирао прошли пут. Може ли Тома поступати тако да на крају има више алтина од Симе, или, пак, Сима може увек у томе спречити Тому и на крају имати више алтина од Томе?

7. (8 поена) Поља шаховске табле 8×8 нумерисана су по дијагоналама, које иду с лева наниже, почевши од горњег левог угла: 1; следећа дијагонала 2, 3; следећа 4, 5, 6; и тако даље (претпоследња дијагонала 62, 63; последња 64). Пера је поставио на ту таблу 8 жетона тако да је у сваком реду и сваком ступцу био по један жетон. Затим је он преместио жетоне тако да је сваки жетон дошао на поље са већим бројем. Може ли после тога у сваком реду и сваком ступцу да се нађе по један жетон?

26. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 27. фебруар 2005. год.

10—11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) На графику полинома са целобројним коефицијентима уочене су две тачке са целобројним координатама. Докажите да, ако је растојање међу њима изражено целим бројем, онда је дуж која их спаја паралелна са апсцисном осом.

2. (5 поена) Кружница k_1 пролази кроз центар кружнице k_2. Кроз тачку C на кружници k_1 повучене су тангенте на k_2 и оне секу кружницу k_1 у тачкама A и B. Докажите да је дуж AB нормална на праву која пролази кроз центре кружница.

3. (5 поена) Миша и Влада деле гомилу од 25 новчића с вредностима 1, 2, 3, ... 25 алтина. При сваком потезу један од њих бира новчић из гомиле, а други говори коме да се да тај новчић. Први бира Миша, а потом онај који има тренутно више алтина; ако имају једнако - онај који је бирао прошли пут. Може ли Миша играти тако да на крају има више алтина од Владе, или, пак, Влада може играти тако да он на крају има више алтина од Мише?

4. (6 поена) Постоји ли квадратни трином $f(x)$, такав да за сваки цео позитиван број n једначина $f(f(...f(x))) = 0$, где је n слова f, има тачно 2^n различитих реалних решења?

5. (7 поена) Икосаедар и додекаедар уписани су у једну исту сферу. Докажите да су они тада и описани око једне исте сфере. (Напомена: Икосаедар има 20 једнаких страна у виду правилних троуглова, из сваког темена полази по 5 ивица и углови које заклапају суседне стране су једнаки. Додекаедар се састоји из 12 једнаких страна - правилних петоуглова, из сваког темена полазе по 3 ивице и углови међу суседним странама су једнаки.)

6. (7 поена) Нека је a угаоно поље шаховске табле 8×8, b њему суседно поље на дијагонали. Докажите да је број начина да "хроми топ" обиђе целу таблу, полазећи са поља a, већи од броја начина да "хроми топ" обиђе целу таблу, полазећи са поља b. ("Хроми топ" се креће по табли по једно поље водоравно или усправно и мора да стане на свако поље табле тачно једном.)

7. У простору је дато 200 тачака. Сваке две од њих спаја дуж, при чему добијене дужи немају пресечних тачака. Свака дуж обојена је једном од K боја. Пеђа хоће сваку од датих тачака да обоји једном од тих K боја, али тако да се не могу наћи две тачке и дуж која је њима одређена исте боје. Може ли Пеђа то увек да уради, ако је:

а) K = 7 (4 поена);

б) K = 10 (4 поена)?