

## 23. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Агрос, Кишар – 29. април 2006.

1. Нека су  $a, b$  и  $c$  позитивни реални бројеви. Доказати:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}. \quad (\text{Грчка})$$

2. Дат је троугао  $ABC$  и права  $m$  која сече странице  $AB$  и  $AC$  у тачкама  $D$  и  $F$ , редом, и продужетак странице  $BC$  у тачки  $E$  тако да је  $C$  између  $B$  и  $E$ . Три праве паралелне са  $m$  кроз  $A, B$  и  $C$  секу по други пут кружницу описану око троугла  $ABC$  у тачкама  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , редом. Доказати да се праве  $A_1E, B_1F$  и  $C_1D$  секу у једној тачки. (Грчка)

3. Наћи све уређене тројке  $(m, n, p)$  позитивних рационалних бројева таквих да су бројеви

$$m + \frac{1}{np}, \quad n + \frac{1}{pm}, \quad p + \frac{1}{mn}$$

сви цели.

(Румунија)

4. Нека је  $m$  природан број. Наћи све природне бројеве  $a$  за које је низ дефинисан са  $a_0 = a$  и

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{ако је } a_n \text{ парно,} \\ a_n + m & \text{ако је } a_n \text{ непарно} \end{cases} \quad \text{за } n = 0, 1, 2, \dots$$

периодичан, са циклусом (сегментом који се периодично понавља) облика  $a_0, a_1, \dots, a_k$  за неко  $k$ . (Бугарска)

*Време за рад 270 минута.  
Сваки задатак вреди 10 поена.*