КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ОЛИМПИЈСКЕ ЕКИПЕ

Вршац, 16.04.2006.

1. Нека је $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2006\} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, при чему важи:

(i) $13 \in A$;

(ii) ако је $a \in A, b \in B$, $a + b \in S$, онда је $a + b \in B$;

(iii) ако је $a \in A, b \in B, ab \in S$, онда је $ab \in A$.

Одредити број елемената скупа A.

2. У унутрашњости правоуглог троугла ABC ($\sphericalangle ACB = 90°$) уочена је тачка P таква да је $AP = 4$, $BP = 2$ и $CP = 1$. Тачка Q, која је симетрична тачки P у односу на AC, припада описаној кружници троугла ABC. Одредити углове троугла ABC.

3. Одредити све природне бројеве n и k, $k > 1$, такве да k дели сваки од бројева

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

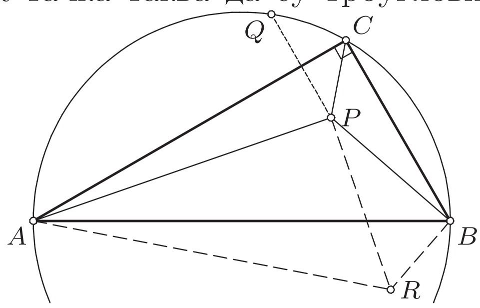
РЕШЕЊА

1. Приметимо да $1 \in B$. Заиста, ако $1 \in A$, онда по услову (iii) за свако $b \in B$ важи $b = 1 \cdot b \in A$, контрадикција.

Нека је x најмањи елемент скупа A. Претпоставимо да је $x < 13$. По услову (ii), индукцијом по k следи да су сви бројеви $1 + kx$ ($k \in \mathbb{N}$) у скупу B. Ако је k ($1 \leqslant k \leqslant 12$) такво да $13 \mid 1+kx = 13y$, онда је $y < x$, па $y \in B$, али тада по (iii) број $13y$ припада скупу A, што је немогуће. Дакле, сви бројеви $1, 2, \dots, 12$ су у B. По услову (ii) је $b+13 \in B$ кад год је $b \in B$, одакле следи индукцијом да сви бројеви који нису дељиви са 13 припадају скупу B. Сада по (iii) $13b \in A$ кад год $13 \nmid b$ $(1 \leqslant b \leqslant [\frac{2006}{13}] = 154)$.

Остаје да проверимо бројеве дељиве са 13^2. Ако $13^2 \in B$, онда $13^2 + 13 = 13 \cdot 14 \in B$, што није тачно. Дакле, $13^2 \in A$, и одатле $13^2 b \in A$ кад год $13 \mid b$. Пошто је $13^3 > 2006$, овим је доказано да су елементи A сви бројеви дељиви са 13, а њих има 154.

2. Означимо $\alpha = \sphericalangle BAC$. Нека је R тачка таква да су троуглови ARB и APC слични и исто оријентисани. Пошто је $\frac{AR}{AP} = \frac{AB}{AC}$ и $\sphericalangle RAP = \sphericalangle BAC$, такође је $\triangle ARP \sim \triangle ABC$. Добијамо $BR = CP \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\cos\alpha}$, $RP = AP \cdot \frac{AC}{BC} = 4\operatorname{tg}\alpha$ и $\sphericalangle BRP = \sphericalangle ARB - \sphericalangle ARP = \sphericalangle AQC - \sphericalangle ABC = 2\alpha$. Сада из косинусне теореме у $\triangle BPR$ добијамо једначину по α:



$$4 = BP^2 = BR^2 + RP^2 - 2BR \cdot RP \cos 2\alpha = \frac{1 + 16\sin^2\alpha - 8\sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

што се своди на $16x^3 + 20x^2 - 8x - 3 = 0$ за $x = \sin\alpha$. Решења ове једначине су $x \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\}$, при чему једино $x = \frac{1}{2}$ има смисла. Дакле, $\alpha = 30^\circ$. Углови троугла ABC су 30°, 60° и 90°.

3. *Лема (Кумерова теорема).* Експонент простог броја p у биномном коефицијенту $\binom{n}{m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ једнак је броју преноса цифара у основи p при сабирању m и $n-m$.

Доказ. Експонент броја p у $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ је $\sum_{i>0}([\frac{n}{p^i}] - [\frac{m}{p^i}] - [\frac{n-m}{p^i}])$. У овој суми, i-ти сабирак је једнак 1 ако се преноси цифра уз p^{i-1}, и 0 у супротном. Одавде следи тврђење. $\square$

Из услова следи да $k \mid n$. Посматрајмо неки прост делилац p броја k; нека $p^r \parallel n$. Како из леме следи да $p \nmid \binom{n}{p^r}$ (нема преноса цифара), једина могућност је $n = p^r$; уједно је и k степен броја p. Из леме такође следи $p^1 \parallel \binom{n}{p^{k-1}}$, па мора бити $k = p$.