47-ма Међународна математичка олимпијада

Љубљана, Словенија, 6–18. јул 2006.

Први дан – 12. јул

1. Нека је ABC троугао и I његов центар уписаног круга. Тачка P у унутрашњости троугла задовољава
$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$
Доказати да је $AP \geq AI$ и да једнакост важи ако и само ако $P = I$.
(Ј. Кореја)

2. Нека је $\mathcal{P}$ правилан 2006-угао. Дијагоналу $\mathcal{P}$ називамо *добром* ако њени крајеви деле обим $\mathcal{P}$ на два дела од којих се сваки састоји од непарног броја страница $\mathcal{P}$. Странице $\mathcal{P}$ такође сматрамо добрим.

   $\mathcal{P}$ је разложен на троуглове помоћу 2003 дијагонале од којих никоје две немају заједничких унутрашњих тачака. Наћи највећи могући број једнакокраких троуглова са по две добре странице који могу да се добију при оваквој подели. *(Србија)*

3. Одредити најмањи реални број M такав да неједнакост
$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$
важи за све реалне бројеве a, b и c. *(Ирска)*

Други дан – 13. јул

4. Наћи све парове (x, y) целих бројева који задовољавају једначину
$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$
(С.А.Д.)

5. Нека је $P(x)$ полином степена $n > 1$ са целим коефицијентима и нека је k природан број. Посматрајмо полином $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, где се P појављује k пута. Доказати да постоји највише n целих бројева t за које је $Q(t) = t$. *(Румунија)*

6. Придружимо свакој страници b конвексног многоугла $\mathcal{P}$ највећу могућу површину троугла који има страницу b и налази се унутар $\mathcal{P}$. Доказати да збир површина придружених страницама $\mathcal{P}$ није мањи од двоструке површине $\mathcal{P}$. *(Србија)*