47. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Љубљана, Словенија – среда, 12. јул 2006.

1. Нека је I центар уписаног круга троугла ABC. У унутрашњости троугла изабрана је тачка P таква да је

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Доказати да је $AP \geqslant AI$ и да се једнакост достиже ако и само ако се P поклапа са I. *(Јужна Кореја)*

2. За дијагоналу правилног 2006-угла $\mathscr{P}$ кажемо да је *добра* ако њени крајеви деле руб $\mathscr{P}$ на два дела од којих се сваки састоји од непарног броја страница $\mathscr{P}$. Странице $\mathscr{P}$ такође сматрамо добрим.

Посматрајмо разбијања многоугла $\mathscr{P}$ на троуглове помоћу 2003 дијагонале од којих никоје две немају заједничких унутрашњих тачака. Одредити највећи могући број једнакокраких троуглова са по две добре странице који се могу појавити при таквом разбијању. *(Србија)*

3. Одредити најмањи реалан број M такав да неједнакост

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве a, b и c. *(Ирска)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

47. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Љубљана, Словенија – четвртак, 13. јул 2006.

4. Наћи све парове (x, y) целих бројева такве да је

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(САД)

5. Нека је $P(x)$ полином степена $n > 1$ са целим коефицијентима и нека је k природан број. Посматрајмо полином

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

где се P појављује k пута. Доказати да постоји највише n целих бројева t таквих да је $Q(t) = t$. *(Румунија)*

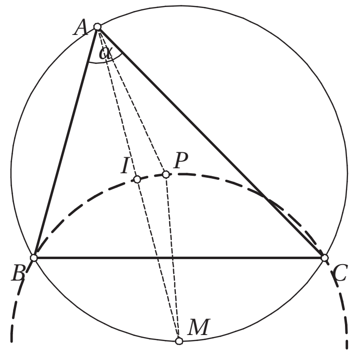
6. Свакој страници b конвексног многоугла $\mathcal{P}$ придружимо највећу површину троугла који је садржан у $\mathcal{P}$ и чија је једна страница b. Доказати да збир свих површина придружених страницама многоугла $\mathcal{P}$ није мањи од двоструке површине многоугла $\mathcal{P}$. *(Србија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Из услова задатка следи да је $\sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, тј. $\sphericalangle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha = \angle BIC$. То значи да P лежи на описаном кругу ω троугла BCI. Како је центар круга ω у средишту M лука BC описаног круга $\triangle ABC$ који не садржи A (јер је $MB = MC = MI$), имамо $AP \geqslant AM - MP = AM - MI = AI$, а једнакост важи само за $P \equiv I$.



2. Једнакокраке троуглове са две добре странице зваћемо *добрим*. Темена доброг троугла T деле обим $\mathscr{P}$ на три дела, од којих се два, рецимо $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$, састоје од непарног броја страница. Кажемо да T *поседује* све странице у $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$.

Сваки добар троугао различит од T поседује паран број страница у сваком од делова $\mathscr{P}_i$, $i = 1,2$. Како страница у $\mathscr{P}_i$ има непаран број, бар једну од њих, рецимо a_i, не поседује ниједан добар троугао осим T. Троуглу T придружујемо две странице a_1 и a_2. По конструкцији, никоја два троугла немају заједничку придружену страницу, па добрих троуглова не може бити више од 1003.

Пример са 1003 добра троугла се може добити повлачењем дијагонала $A_{2k-2}A_{2k}$ за $k = 1,\dots,1003$ (где је $A_0 = A_{2006}$) и још произвољних 1000 дијагонала.

3. Нека је без смањења општости $a \geqslant b \geqslant c$. Означимо $a-b=m$, $b-c=n$ и $a+b+c=s$. Лева страна неједнакости из задатка се факторише као $L = (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) = mn(m+n)s$, док је десна $a^2+b^2+c^2 = \frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{3}$. Како је $(m+n)^2 \leqslant \frac{2}{3}(m^2+n^2+(m+n)^2)$, по неједнакости између средина имамо

$$2L^2 \leqslant \frac{(m+n)^6 s^2}{8} \leqslant s^2\left(\frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3}\right)^3 \leqslant \left(\frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{4}\right)^4 = \frac{3^4(a^2+b^2+c^2)^4}{4^4},$$

тј. $L \leqslant \frac{9}{16\sqrt{2}}(a^2+b^2+c^2)^2$. Једнакост се достиже ако је $m=n$ и $s^2 = \frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3}$, одакле се лако рачуна $a:b:c = (1+\frac{3}{\sqrt{2}}):1:(1-\frac{3}{\sqrt{2}})$.

Према томе, $M = \frac{9}{16\sqrt{2}}$.

Друго решење. Имамо $L = |(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|$. Смемо да претпоставимо да је $a+b+c=1$ (случај $a+b+c=0$ је тривијалан). Монични кубни полином чије су нуле $a-b$, $b-c$ и $c-a$ је облика

$$P(x) = x^3 + qx + r, \quad q = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2), \quad r = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

Тада је $M = \max r\left(\frac{1-2q}{3}\right)^{-2}$. Како су све три нуле полинома $P(x)$ реалне, његова дискриминанта $D = (\frac{q}{3})^3 + (\frac{r}{2})^2$ је ненегативна, тј. $r^2 \geqslant -\frac{4}{27}q^3$. Одавде је $M^2 \leqslant f(q) = -\frac{4}{27}q^3\left(\frac{1-2q}{3}\right)^{-4}$. Функција f достиже максимум $\frac{3^4}{2^9}$ у тачки $q = -\frac{3}{2}$, па је $M \leqslant \frac{9\sqrt{2}}{32}$. Случај једнакости се једноставно налази.

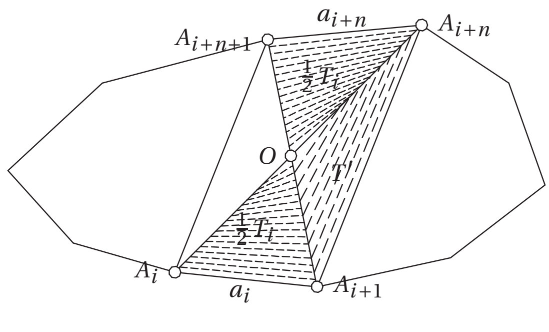
4. Нека је $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$. Број y је непаран и $2^x \mid (y+1)(y-1)$, али нису оба чиниоца $y+1$ и $y-1$ дељива са 4, одакле следи да је један од њих дељив са 2^{x-1}, тј. $y = 2^{x-1}z \pm 1$. С друге стране, очигледно је $2^x + 1 < y < 2^{x+1} - 1$ за $x \geqslant 2$, па је $z = 3$. Ако означимо $t = 2^{x-1}$, полазна једначина постаје $8t^2 + 2t + 1 = (3t \pm 1)^2$, чије је једино природно решење $t = 8$. Тада је $x = 4$, што и јесте решење: $1 + 2^4 + 2^9 = 23^2$.

5. Покажимо да ако је $Q(t) = t$, онда је $P(P(t)) = t$. Нека је $x_0 = t$ и $x_{i+1} = P(x_i)$ за $i \geqslant 0$, тако да је $x_k = x_0$. Означимо $d_i = x_{i+1} - x_i$. Како $d_i \mid P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = d_{i+1}$ за све i, из $d_k = d_0$ следи да је $|d_0| = |d_1| = \cdots = |d_k|$. Претпоставимо да је $d_1 = d_0 = d \neq 0$. Тада је $d_2 = d$ (у супротном имамо $x_3 = x_1$, те се у низу више никад неће појавити x_0); слично, $d_3 = d$ итд, па је $x_k = x_0 + kd \neq x_0$ за све k, контрадикција. Следи да је $d_1 = -d_0$, па је $x_2 = x_0$, тј. $P(P(t)) = t$.

Ако свако $t \in \mathbb{Z}$ за које је $Q(t) = t$ задовољава $P(t) = t$, број решења не прелази $\deg P = n$. Претпоставимо да за неко $t_1 \in \mathbb{Z}$ важи $P(t_1) = t_2 \neq t_1$ и $P(t_2) = t_1$, и посматрајмо произвољно $t_3 \notin \{t_1, t_2\}$ и $P(t_3) = t_4$ са $P(t_4) = t_3$. Тада $t_1 - t_3 \mid t_2 - t_4 \mid t_1 - t_3$, тј. $|t_1 - t_3| = |t_2 - t_4|$, а аналогно и $|t_1 - t_4| = |t_2 - t_3|$. Ако је $t_1 - t_3 = t_2 - t_4 = k \neq 0$, друга једнакост постаје $|t_1 - t_2 + k| = |t_2 - t_1 + k|$, што је немогуће. Зато мора да важи $t_1 - t_3 = t_4 - t_2$, тј. $P(t_1) + t_1 = P(t_3) + t_3 = c$ за неко c. Следи да су сва целобројна решења једначине $P(P(t)) = t$ нуле полинома $P(x) + x - c$, а њих има највише n.

6. Сваком темену A многоугла $\mathscr{P}$ одговара јединствена тачка A' на рубу $\mathscr{P}$ таква да права AA' полови површину $\mathscr{P}$. Рачунајући и те тачке по потреби у темена, можемо да претпоставимо да $\mathscr{P}$ има паран број темена, редом $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, и да свака од дијагонала A_iA_{i+n} $(i = 1, \ldots, n)$ полови његову површину.

Означимо са a_i и d_i редом страницу A_iA_{i+1} и полуправу A_iA_{i+n} $(1 \leqslant i \leqslant 2n$; индекси су по модулу $2n)$. За $i = 1, \ldots, n$, нека је $\mathscr{P}_i$ област ограничена са d_i, d_{i+1} и a_i, a_{i+n}, и T_i њена површина. Покажимо да области $\mathscr{P}_i$ покривају цео $\mathscr{P}$. Посматрајмо било коју тачку X унутар $\mathscr{P}$. Нека је без смањења општости X лево од d_i. Како је X десно од d_{i+n}, постоји j $(i \leqslant j < i + n)$ такво да је X



лево од d_j и десно од d_{j+1}, а тада $X \in \mathscr{P}_j$. Одавде следи да је $T_1 + \cdots + T_n \geqslant S$.

Означимо са S_i површину придружену страници a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Нека се d_i и d_{i+1} секу у тачки O. Троуглови OA_iA_{i+1} и $OA_{i+n}A_{i+n+1}$ имају површину $\frac{1}{2}T_i$, док бар један од троуглова OA_iA_{i+n+1} и $OA_{i+1}A_{i+n}$ има површину T' не мању од $\frac{1}{2}T_i$. Следи да је $S_i, S_{i+n} \geqslant \frac{1}{2}T_i + T' \geqslant T_i$. Најзад, $S_1 + \cdots + S_{2n} \geqslant 2(T_1 + \cdots + T_n) \geqslant 2S$.

Једнакост важи ако и само ако је $\mathscr{P}$ централно симетричан многоугао.

Друго решење. Означимо са S_a површину придружену страници a. Кажемо да је теме V придружено страници a конвексног (можда дегенерисаног) многоугла $\mathscr{P}$ ако троугао одређен са a и V има површину S_a. Дефинишимо $\sigma(\mathscr{P}) = \sum_a S_a$ и $\delta(\mathscr{P}) = \sigma(\mathscr{P}) - 2[\mathscr{P}]$, где $[X]$ означава површину многоугла X. Доказаћемо индукцијом по броју n међусобно непаралелних страница у $\mathscr{P}$ да је $\delta(\mathscr{P}) \geqslant 0$ за свако $\mathscr{P}$. Ово је тривијално за $n = 2$; нека је $n \geqslant 3$.

Посматрајмо две суседне странице AB и BC без заједничких придружених темена (јасно је да она постоје). Нека се праве кроз темена U и V придружена страницама AB и BC, паралелне тим страницама редом, секу у X. Не умањујемо општост ако претпоставимо да на дужима UX и VX нема других темена $\mathscr{P}$. Зваћемо странице и темена $\mathscr{P}$ које леже унутар $\triangle UVX$ *пасивним* (изузев U и V). Лако се види да пасивна темена нису придружена ниједној страници $\mathscr{P}$, као и да је свим пасивним страницама придружено теме B. Посматрајмо сада многоугао $\mathscr{P}'$ добијен заменом свих пасивних темена $\mathscr{P}$ тачком X. Како је теме B придружено и страницама UX и VX у $\mathscr{P}'$, збир површина придружених пасивним страницама се повећао за површину S дела четвороугла $BUXV$ ван $\mathscr{P}$, док се остале придружене површине нису промениле. Према томе, $\sigma(\mathscr{P}') = \sigma(\mathscr{P}) + S$. Како је $[\mathscr{P}'] = [\mathscr{P}] + S$, следи $\delta(\mathscr{P}') = \delta(\mathscr{P}) - S$.

Преласком са $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}'$ број непаралелних страница се смањио, па по индуктивној претпоставци важи $0 \leqslant \delta(\mathscr{P}') \leqslant \delta(\mathscr{P})$.

Напомена. Такође се може показати да збир свих придружених површина није већи од троструке површине $\mathscr{P}$.