

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Први разред – А категорија

1. Ако су \mathcal{A} и \mathcal{B} непразни подскупови равни α , такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова \mathcal{A} или \mathcal{B} .

2. Наћи сва целобројна решења једначине

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x + 2y + 2z = 2004.$$

3. Петоугао $ABCDE$ уписан је у круг полупречника r . Ако је $AB = BC = DE = r$, доказати да је троугао BGF једнакостраничан, при чему су G и F средишта страница CD и EA петоугла.

4. Од свих троуглова једнаког обима највећу површину има једнакостраничан троугао. Доказати.

5. За неки природан број n , $n > 3$, нека је S збир цифара броја $1 + 2 + \dots + n$. Ако у декадном запису броја S учествују све исте цифре, која цифра то може бити?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да $n^2 + 5n + 6$ ни за један природан број n није тачан квадрат.
2. Ако су \mathcal{A} и \mathcal{B} непразни подскупови равни α , такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова \mathcal{A} или \mathcal{B} .
3. а) Доказати да број $n^2 + n + 1$ није дељив са 2006 ни за један природан број n .
б) Доказати да број $n^2 + n + 2$ није дељив са 2007 ни за један природан број n .
4. Дат је троугао ABC у коме важи $\sphericalangle C = 90^\circ + \frac{\sphericalangle B}{2}$. Нека је M средиште странице BC . Круг са центром у A и полупречником AM сече, опет, праву BC у D . Доказати да је $MD = AB$.
5. Кружница уписана у троугао ABC додирује његове странице AB , BC и CA у тачкама M , N и K редом. Права кроз тачку A , паралелна са NK , сече праву NM у тачки D . Права кроз тачку A , паралелна са NM , сече праву NK у тачки E . Доказати да права DE садржи средњу линију троугла ABC .

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Други разред – А категорија

1. Доказати да је $2^{n+2} \cdot 7^n + 1$ увек сложен број за сваки природан број n .
2. Да ли постоје неподударни троуглови једнаких обима и површина?
3. Нека је k полукружница са центром O конструисана над пречником AB и нека су тачке S_1, S_2, S_3 на полукружници k такве да је $\sphericalangle AOS_1 = \sphericalangle S_1OS_2 = \frac{\pi}{9}$ и $\sphericalangle S_2OS_3 = \frac{2\pi}{9}$. Доказати да је $P_1P_2 = P_3O$, где су P_1, P_2, P_3 пројекције тачака S_1, S_2, S_3 на пречник AB .
4. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних (познанство је узајамно). Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познаника.
5. У скупу реалних бројева решити једначину $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Други разред – Б категорија

1. Наћи сва целобројна решења једначине

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1.$$

2. Постоје ли реални бројеви b и c такви да свака од једначина $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b+1)x + c+1 = 0$ има по два целобројна корена?
3. Нека је функција $f : R \rightarrow R$, дата са $f(x) = \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$, за свако $x \in R$. Одредити максималну вредност (ако постоји) дате функције.
4. Дат је конвексан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ чије су све странице једнаке и $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6$, при чему је α_i унутрашњи угао шестоугла код темена A_i . Доказати да је $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_5$ и $\alpha_3 = \alpha_6$.
5. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних (познанство је узајамно). Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познаника.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све вредности природног броја n , за који постоји његов делилац d , тако да $nd + 1$ дели $n^2 + d^2$.

2. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

3. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такве да је

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y)),$$

за свако $x \in \mathbb{R}$.

4. Доказати да од укупно 25 ученика није могуће формирати више од $2 \cdot 5^3$ кошаркашких тимова од по 5 играча, тако да број заједничких играча за свака два тима није већи од 2.

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Доказати неједнакост

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Трећи разред – Б категорија

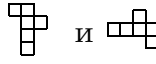

1. Нека су a , b катете и c хипотенуза правоуглог троугла ABC . Израчунати максималну вредност израза $\frac{t_a+t_b}{t_c}$, где су t_a , t_b и t_c дужине тежишних дужи које одговарају, редом, страницама a , b и c троугла ABC .

2. Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$\sin^{2005} x + \cos^{2005} x + \sin^{2006} x \leq 2.$$

Када важи једнакост?

3. Дијагонале AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки E тако да су површине троуглова AED и BCE једнаке. Одредити меру угла ACD , ако су странице троугла ABE у односу $BE : EA : AB = 5 : 6 : 7$.

4. У мрежи коцке су два квадратића суседна уколико имају заједничку страницу (само једна тачка није довољна) и сви квадратићи су међусобно повезани преко суседних. Две мреже коцке су еквивалентне ако једну од друге можемо добити коришћењем ротације и/или симетрије: нпр. мреже  су међусобно еквивалентне, али нису еквивалентне са . Наћи број нееквивалентних мрежа коцке ивице 1 и нацртати све такве мреже.

5. Наћи све тројке (x, y, z) природних бројева таквих да је

$$x! + y! = 15 \cdot 2^{z!}.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Колико постоји правоуглих троуглова чија су темена тачке целобројне решетке $3 \times n$, где је $n \geq 5$ (подразумева се да ова решетка има $3n$ тачака)?
2. Дат је оштроугли троугао ABC . Нека је I центар уписаног круга, O центар описаног круга и H ортоцентар троугла $\triangle ABC$. Права AI сече страницу BC у A' , а права BI сече страницу AC у B' . Права OH сече страницу AC у P , а BC у Q . Ако је четвороугао $CA'IB'$ конвексан и тетиван, доказати да је $PQ = AP + BQ$.
3. Доказати да за сваки природан број n постоји природан број x такав да је $2^x - x$ дељиво са n .
4. Ако су x_i ($i = 1, 2, \dots, 48$) нуле полинома $P(x) = 18x^{48} + 3x + 2006$, израчунати $\sum_{i=1}^{48} \frac{x_i}{1 + x_i}$.
5. Одредити све функције $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ такве да је $f(f(x) + y + 1) = x + f(y) + 1$ за свака два цела броја x и y .

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

2. Наћи ону вредност $a > 1$ за коју једначина $a^x = x$ има тачно једно решење.
3. Одредити углове троугла ако за његове углове и странице важи

$$a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$$

(a, b и c су редом странице наспрам углова α, β и γ).

4. Дата је кружница k са својим центром O . Само помоћу шестара конструисати темена правилног дванаестоугла уписаног у дату кружницу.
5. За природан број кажемо да је палиндром ако је једнак броју записаном истим цифрама у обрнутом редоследу.
- (а) Наћи највећи петоцифрен палиндром који је дељив са 101.
- (б) Наћи највећи број узастопних петоцифрених бројева међу којима нема палиндрома.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.