Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Први разред – А категорија

1. Ако су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ непразни подскупови равни α, такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$.

2. Наћи сва целобројна решења једначине

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x + 2y + 2z = 2004.$$

3. Петоугао $ABCDE$ уписан је у круг полупречника r. Ако је $AB = BC = DE = r$, доказати да је троугао BGF једнакостраничан, при чему су G и F средишта страница CD и EA петоугла.

4. Од свих троуглова једнаког обима највећу површину има једнакостраничан троугао. Доказати.

5. За неки природан број n, $n > 3$, нека је S збир цифара броја $1 + 2 + ... + n$. Ако у декадном запису броја S учествују све исте цифре, која цифра то може бити?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да $n^2 + 5n + 6$ ни за један природан број n није тачан квадрат.

2. Ако су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ непразни подскупови равни α, такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$.

3. а) Доказати да број $n^2 + n + 1$ није дељив са 2006 ни за један природан број n.
б) Доказати да број $n^2 + n + 2$ није дељив са 2007 ни за један природан број n.

4. Дат је троугао ABC у коме важи $\sphericalangle C = 90^o + \frac{\sphericalangle B}{2}$. Нека је M средиште странице BC. Круг са центром у A и полупречником AM сече, опет, праву BC у D. Доказати да је $MD = AB$.

5. Кружница уписана у троугао ABC додирује његове странице AB, BC и CA у тачкама M, N и K редом. Права кроз тачку A, паралелна са NK, сече праву NM у тачки D. Права кроз тачку A, паралелна са NM, сече праву NK у тачки E. Доказати да права DE садржи средњу линију троугла ABC.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Други разред – А категорија

1. Доказати да је $2^{n+2} \cdot 7^n + 1$ увек сложен број за сваки природан број n.

2. Да ли постоје неподударни троуглови једнаких обима и површина?

3. Нека је k полукружница са центром O конструисана над пречником AB и нека су тачке S_1, S_2, S_3 на полукружници k такве да је $\sphericalangle AOS_1 = \sphericalangle S_1OS_2 = \frac{\pi}{9}$ и $\sphericalangle S_2OS_3 = \frac{2\pi}{9}$. Доказати да је $P_1P_2 = P_3O$, где су P_1, P_2, P_3 пројекције тачака S_1, S_2, S_3 на пречник AB.

4. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних (познанство је узајамно). Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познаника.

5. У скупу реалних бројева решити једначину $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Други разред – Б категорија

1. Наћи сва целобројна решења једначине

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1.$$

2. Постоје ли реални бројеви b и c такви да свака од једначина $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ има по два целобројна корена?

3. Нека је функција $f : R \longrightarrow R$, дата са $f(x) = \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$, за свако $x \in R$. Одредити максималну вредност (ако постоји) дате функције.

4. Дат је конвексан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ чије су све странице једнаке и $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6$, при чему је α_i унутрашњи угао шестоугла код темена A_i. Доказати да је $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_5$ и $\alpha_3 = \alpha_6$.

5. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних (познанство је узајамно). Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познаника.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све вредности природног броја n, за који постоји његов делилац d, тако да $nd+1$ дели n^2+d^2.

2. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

3. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да је

$$f(x)=\max_{y\in\mathbb{R}}(2xy-f(y)),$$

за свако $x\in\mathbb{R}$.

4. Доказати да од укупно 25 ученика није могуће формирати више од $2\cdot 5^3$ кошаркашких тимова од по 5 играча, тако да број заједничких играча за свака два тима није већи од 2.

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB=BC$, $CD=DE$ и $EF=FA$. Доказати неједнакост

$$\frac{AB}{BE}+\frac{CD}{DA}+\frac{EF}{FC}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Трећи разред – Б категорија

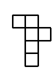
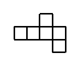
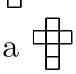
1. Нека су a, b катете и c хипотенуза правоуглог троугла ABC. Израчунати максималну вредност израза $\frac{t_a+t_b}{t_c}$, где су t_a, t_b и t_c дужине тежишних дужи које одговарају, редом, страницама a, b и c троугла ABC.

2. Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$\sin^{2005} x + \cos^{2005} x + \sin^{2006} x \leqslant 2.$$

Када важи једнакост?

3. Дијагонале AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки E тако да су површине троуглова AED и BCE једнаке. Одредити меру угла ACD, ако су странице троугла ABE у односу $BE : EA : AB = 5 : 6 : 7$.

4. У мрежи коцке су два квадратића суседна уколико имају заједничку страницу (само једна тачка није довољна) и сви квадратићи су међусобно повезани преко суседних. Две мреже коцке су еквивалентне ако једну од друге можемо добити коришћењем ротације и/или симетрије: нпр. мреже  и  су међусобно еквивалентне, али нису еквивалентне са . Наћи број нееквивалентних мрежа коцке ивице 1 и нацртати све такве мреже.

5. Наћи све тројке (x, y, z) природних бројева таквих да је

$$x! + y! = 15 \cdot 2^{z!}.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Колико постоји правоуглих троуглова чија су темена тачке целобројне решетке $3 \times n$, где је $n \geqslant 5$ (подразумева се да ова решетка има $3n$ тачака)?

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је I центар уписаног круга, O центар описаног круга и H ортоцентар троугла $\triangle ABC$. Права AI сече страницу BC у A', а права BI сече страницу AC у B'. Права OH сече страницу AC у P, а BC у Q. Ако је четвороугао $CA'IB'$ конвексан и тетиван, доказати да је $PQ = AP + BQ$.

3. Доказати да за сваки природан број n постоји природан број x такав да је $2^x - x$ дељиво са n.

4. Ако су x_i $(i = 1, 2, \ldots, 48)$ нуле полинома $P(x) = 18x^{48} + 3x + 2006$, израчунати $\displaystyle\sum_{i=1}^{48} \frac{x_i}{1 + x_i}$.

5. Одредити све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да је $f(f(x) + y + 1) = x + f(y) + 1$ за свака два цела броја x и y.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

2. Наћи ону вредност $a>1$ за коју једначина $a^x=x$ има тачно једно решење.

3. Одредити углове троугла ако за његове углове и странице важи

$$a:\alpha=b:\beta=c:\gamma$$

(a,b и c су редом странице наспрам углова α,β и γ).

4. Дата је кружница k са својим центром O. Само помоћу шестара конструисати темена правилног дванаестоугла уписаног у дату кружницу.

5. За природан број кажемо да је палиндром ако је једнак броју записаном истим цифрама у обрнутом редоследу.

(a) Наћи највећи петоцифрен палиндром који је дељив са 101.

(b) Наћи највећи број узастопних петоцифрених бројева међу којима нема палиндрома.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.