

**46. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА**

Вршац, 15.04.2006.

Први разред

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$ је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = 55^\circ$, $\sphericalangle DCA = 20^\circ$, $\sphericalangle BCA = 15^\circ$. Одредити величину угла $\sphericalangle DBA$.
2. Нека су x, y, z позитивни реални бројеви такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да је

$$yz + zx + xy \geq 4(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) + 5xyz.$$

Када важи једнакост?

3. Одредити највећи природан број чије су све цифре различите и који је дељив сваком својом цифром, тј. одговарајућим једноцифреним бројем.
4. Татјана је замислила полином $P(x)$, чији су коефицијенти из скупа \mathbb{N}_0 . Даница жели да одреди тај полином. Она у једном потезу изговара цео број k , а Татјана јој саопштава вредност $P(k)$. Наћи најмањи број потеза потребних Даници да открије полином који је Татјана замислила.

**46. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА**

Вршац, 15.04.2006.

Други разред

1. Нека су a, b, c, A, B, C реални бројеви, такви да је $a \neq 0$, $A \neq 0$ и за свако реално x важи

$$|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|.$$

Доказати да важи

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|.$$

2. За произвољну тачку M унутар квадрата $ABCD$, нека су T_1, T_2 и T_3 тежишта троуглова ABM , BCM и DAM , редом. Нека је O_M центар описане кружнице троугла $T_1T_2T_3$. Одредити геометријско место тачака O_M , када се тачка M креће по унутрашњости квадрата $ABCD$.
3. За сваки природан број a нека је $S(a) = \{a^n + a + 1 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$. Да ли постоји бесконачан скуп $A \subset \mathbb{N}$, такав да за свака два различита елемента $x, y \in A$ важи:

$$x \text{ и } y \text{ су узајамно прости и } S(x) \cap S(y) = \emptyset?$$

4. На столу је у низ поређано n новчића. У једном кораку дозвољено је одабрати један новчић окренут писмом нагоре (али не један од крајњих), уклонити га и окренути први новчић лево и први новчић десно од њега. На почетку су сви новчићи окренути писмом нагоре. Доказати да је могуће после неколико корака постићи да остану само два новчића ако и само ако $n - 1$ није дељиво са 3.

**46. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА**

Вршац, 15.04.2006.

Трећи и четврти разред

1. Нека су x, y, z позитивни реални бројеви чији је збир једнак 1. Доказати да је

$$\frac{x}{y^2 + z} + \frac{y}{z^2 + x} + \frac{z}{x^2 + y} \geq \frac{9}{4}.$$

Када важи једнакост?

2. Нека су p и q прости бројеви и нека је $p < q$. Одредити све парове (x, y) природних бројева за које важи

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

3. Доказати да за произвољан тетраедар постоје две равни такве да однос површина пројекција тетраедра на те две равни није мањи од $\sqrt{2}$.
4. У квадратну таблицу 7×7 Милош је уписао све природне бројеве од 1 до 49. Ђорђе треба да одгонетне распоред бројева у таблици. Он може да изабере квадрат који покрива нека поља таблице и да Милошу постави питање који се бројеви налазе у унутрашњости тог квадрата. Колико најмање питања Ђорђе треба да постави да би на основу Милошевих одговора сазнао распоред свих бројева у таблици?