46. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Вршац, 15.04.2006.

Први разред

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$ је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = 55°$, $\sphericalangle DCA = 20°$, $\sphericalangle BCA = 15°$. Одредити величину угла $\sphericalangle DBA$.

2. Нека су x, y, z позитивни реални бројеви такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да је

$$yz + zx + xy \geqslant 4\left(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2\right) + 5xyz\,.$$

Када важи једнакост?

3. Одредити највећи природан број чије су све цифре различите и који је дељив сваком својом цифром, тј. одговарајућим једноцифреним бројем.

4. Татјана је замислила полином $P(x)$, чији су коефицијенти из скупа $\mathbb{N}_0$. Даница жели да одреди тај полином. Она у једном потезу изговара цео број k, а Татјана јој саопштава вредност $P(k)$. Наћи најмањи број потеза потребних Даници да открије полином који је Татјана замислила.

46. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Вршац, 15.04.2006.

Други разред

1. Нека су a, b, c, A, B, C реални бројеви, такви да је $a \neq 0$, $A \neq 0$ и за свако реално x важи

$$\left|ax^2 + bx + c\right| \leqslant \left|Ax^2 + Bx + C\right| .$$

Доказати да важи

$$\left|b^2 - 4ac\right| \leqslant \left|B^2 - 4AC\right| .$$

2. За произвољну тачку M унутар квадрата $ABCD$, нека су T_1, T_2 и T_3 тежишта троуглова ABM, BCM и DAM, редом. Нека је O_M центар описане кружнице троугла $T_1T_2T_3$. Одредити геометријско место тачака O_M, када се тачка M креће по унутрашњости квадрата $ABCD$.

3. За сваки природан број a нека је $S(a) = \{a^n + a + 1 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$. Да ли постоји бесконачан скуп $A \subset \mathbb{N}$, такав да за свака два различита елемента $x, y \in A$ важи:

$$x \text{ и } y \text{ су узајамно прости и } S(x) \cap S(y) = \emptyset\,?$$

4. На столу је у низ поређано n новчића. У једном кораку дозвољено је одабрати један новчић окренут писмом нагоре (али не један од крајњих), уклонити га и окренути први новчић лево и први новчић десно од њега. На почетку су сви новчићи окренути писмом нагоре. Доказати да је могуће после неколико корака постићи да остану само два новчића ако и само ако $n-1$ није дељиво са 3.

46. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Вршац, 15.04.2006.

Трећи и четврти разред

1. Нека су x, y, z позитивни реални бројеви чији је збир једнак 1. Доказати да је

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y} \geqslant \frac{9}{4}\,.$$

Када важи једнакост?

2. Нека су p и q прости бројеви и нека је $p < q$. Одредити све парове (x, y) природних бројева за које важи

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\,.$$

3. Доказати да за произвољан тетраедар постоје две равни такве да однос површина пројекција тетраедра на те две равни није мањи од $\sqrt{2}$.

4. У квадратну таблицу 7×7 Милош је уписао све природне бројеве од 1 до 49. Ђорђе треба да одгонетне распоред бројева у таблици. Он може да изабере квадрат који покрива нека поља таблице и да Милошу постави питање који се бројеви налазе у унутрашњости тог квадрата. Колико најмање питања Ђорђе треба да постави да би на основу Милошевих одговора сазнао распоред свих бројева у таблици?