24. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Родос, Грчка – 28. април 2007

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $AB = BC = CD$, дијагонале AC и BD су различите дужине и секу се у тачки E. Доказати да је $AE = DE$ ако и само ако је $\angle BAD + \angle ADC = 120^\circ$. *(Албанија)*

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све реалне бројеве x, y важи

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y.$$

(Бугарска)

3. Наћи све природне бројеве n за које постоји пермутација σ бројева $1, 2, \ldots, n$ таква да је број

$$\sqrt{\sigma(1) + \sqrt{\sigma(2) + \sqrt{\cdots + \sqrt{\sigma(n)}}}}$$

рационалан. *(Србија)*

4. Дат је цео број $n \geq 3$. Нека су $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_3$ границе три конвексна n-тоугла у равни таква да је пресек сваке две од њих коначан скуп тачака. Наћи највећи могући број тачака скупа $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$.

(Турска)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.