24. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Родос, Грчка – 28. април 2007.

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $AB = BC = CD$, дијагонале AC и BD су различите дужине и секу се у тачки E. Доказати да је $AE = DE$ ако и само ако је $\angle BAD + \angle ADC = 120^\circ$. *(Албанија)*

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све реалне бројеве x, y важи

$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y.$$

(Бугарска)

3. Наћи све природне бројеве n за које постоји пермутација σ бројева $1, 2, \ldots, n$ таква да је број

$$\sqrt{\sigma(1) + \sqrt{\sigma(2) + \sqrt{\cdots + \sqrt{\sigma(n)}}}}$$

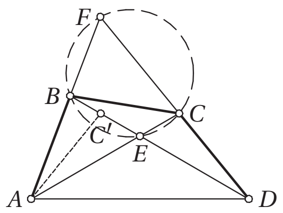
рационалан. *(Србија)*

4. Дат је цео број $n \geqslant 3$. Нека су $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ и $\mathscr{C}_3$ границе три конвексна n-тоугла у равни таква да је пресек сваке две од њих коначан скуп тачака. Наћи највећи могући број тачака скупа $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3$. *(Турска)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Нека је C' тачка на полуправој EB таква да је $EC' = EC$. Из подударности троуглова AEC' и DEC добијамо $AC' = DC = AB$, али $C' \not\equiv B$, па следи $180^\circ = \sphericalangle ABD + \sphericalangle AC'D = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD$. То значи да се полуправе AB и DC секу у некој тачки F (јер је $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD > 180^\circ$) и да је четвороугао $BEFC$ тетиван. Сада је



$\sphericalangle EFA = \sphericalangle ECB = \sphericalangle EAF$, па је $EF = EA = ED$, тј. E је центар описаног круга $\triangle ADF$. Најзад, $2\sphericalangle AFD = \sphericalangle AED = \sphericalangle BEC = 180^\circ - \sphericalangle AFD$, дакле $\sphericalangle AFD = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 120^\circ$.

Друго решење. Нека је $AB = BC = CD = 1$, $\sphericalangle ACB = x$ и $\sphericalangle DBC = y$. Имамо $AC = 2\cos x$ и $CE = \frac{\sin y}{\sin(x+y)}$ по синусној теореми у $\triangle BCE$, па је $AE = 2\cos x - \frac{\sin y}{\sin(x+y)} = \frac{2\sin(x+y)\cos x - \sin y}{\sin(x+y)} = \frac{\sin(2x+y)}{\sin(x+y)}$. Аналогно је $DE = \frac{\sin(x+2y)}{\sin(x+y)}$, па из услова $AE = DE$ следи $0 = \sin(2x+y) - \sin(x+2y) = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{3x+3y}{2}$. Како је $x \neq y$ и $x, y < 90^\circ$, мора бити $\frac{3x+3y}{2} = 90^\circ$, тј. $x + y = 60^\circ$. Најзад, $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 360^\circ - 2x - 2y = 240^\circ$, одакле одмах следи тврђење.

2. Заменом $(x, f(x))$ и $(z, 2f(x) - f(z))$ уместо (x, y) редом добијамо $f(2f(x)) = f(0) + 4f(x)^2$ и $f(2f(x)) = f(2f(z) - 2f(x)) + 8f(x)f(z) - 4f(z)^2$. Одузимањем прве везе од друге добијамо

$$f(2f(x) - 2f(z)) - (2f(x) - 2f(z))^2 = f(0). \tag{1}$$

Приметимо да се, ако је $f \not\equiv 0$ ($f \equiv 0$ је једно решење), сваки реалан број t може представити као $2f(x) - 2f(z)$: заиста, из полазне једначине имамо $2(f(f(u)+y) - f(f(u)-y)) = 8f(u)y = t$ за $y = \frac{t}{8f(u)}$ где је $f(u) \neq 0$. Зато из (1) следи $f(t) - t^2 = f(0) = c$, тј. $f(t) = t^2 + c$. Лако се проверава да је и то решење.

3. Означимо $a_i = \sqrt{\sigma(i) + \sqrt{\cdots + \sqrt{\sigma(n)}}}$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ и $a_{n+1} = 0$. Ако је a_1 рационалан, вишеструким квадрирањем добијамо да су и $a_2, \dots, a_n$ рационални. Шта више, a_n мора бити цео, па су онда и $a_{n-1}, \dots, a_1$ цели. Даље, из $a_n < \sqrt{n} + 1$ следи $a_{n-1} < \sqrt{n + \sqrt{n} + 1} < \sqrt{n} + 1$, а даље и $a_{n-2} < \sqrt{n} + 1$ итд, па је $a_i < \sqrt{n} + 1$ за све k.

Нека је $k^2 < n \leqslant (k+1)^2$. За неко j је $\sigma(j) = k^2 + 1$. Како је $a_j > k$, имамо $a_j = \sqrt{k^2 + 1 + a_{j+1}} \geqslant k + 1$, тј. $a_{j+1} \geqslant 2k$. Међутим, $a_{j+1} < \sqrt{n} + 1$, одакле добијамо $2k < \sqrt{(k+1)^2 + 1}$, што даје $3k^2 < 2k + 2$, па је $k \leqslant 1$, тј. $n \leqslant 4$.

Ако је $n = 4$, онда је $\sigma(4) = 1$ или $\sigma(4) = 4$. У првом случају мора бити $\sigma(3) = 3$ и $\sigma(2) = 2$, па остаје $\sigma(1) = 4$, што није решење; у другом случају $\sigma(3) = \sigma(2) = 2$, опет немогуће. Слично, ни за $n = 2$ нема решења. За $n = 1$ и $n = 3$ решења $\sqrt{1} = 1$ и $\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}} = 2$. Дакле, одговор је $n \in \{1, 3\}$.

4. Тачке у $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3$ су темена конвексног многоугла $\mathscr{P}$. Посматрајмо једну његову страницу AB. Она припада највише једној од граница n-углова $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ (пресек никоје две не садржи целу дуж), што значи да права AB одсеца од преостала два n-угла бар по једно теме. Тако свака страница $\mathscr{P}$ одсеца бар два од укупно $3n$ темена $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$, па $\mathscr{P}$ не може да има више од $\frac{3n}{2}$ страница.

Број $m = [\frac{3n}{2}]$ се може достићи. Нека је $A_1A_2\dots A_m$ конвексан m-угао, a_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ права кроз темена A_k, A_{k+1}, и b_k $(1 \leqslant k \leqslant 3n-m)$ произвољна права кроз A_k које са m-углом нема других заједничких тачака $(A_{n+1} = A_1,\ b_{n+1} \neq b_1)$. Довољно је дефинисати $\mathscr{C}_i$ $(i = 1,2,3)$ као многоугао одређен свим (дефинисаним) правим a_k и b_l, где је $k \equiv l+1 \equiv i \pmod 3$. Лако се проверава да су $\mathscr{C}_i$ заиста n-углови.