Concursul International de Matematica „Arhimede“, IMAC

Букурешт, Румунија, 27. & 28.06.2007.

Ђорђе Дугошија, Ђорђе Кртинић

У оквиру припрема за Међународну математичку олимпијаду, која је одржана од 19. до 31. јула ове године у Вијетнаму, екипа Србије гостовала је у Румунији. Тамо је одржано тренинг такмичење, које је прављено као симулација олимпијаде, два дана са по три задатка, бодованих до седам поена. Поред Србије, на овом такмичењу су учествовале екипе Молдавије и Шпаније, као и двадесетак ученика из Румуније (учесника румунског савезног такмичења). Комисија је одлучила да ниво задатака буде нешто нижи него на ММО (нарочито првог дана), али и да време за рад буде краће. Задаци нису били типични за средњошколска такмичења и чини се да су ученици доживели једно ново искуство, из кога ће, надамо се, доста научити. Нашу земљу представљали су:

1. Младен Радојевић, ученик четвртог разреда Математичке гимназије у Београду,
2. Марко Јевремовић, ученик четвртог разреда Гимназије у Краљеву,
3. Марија Јелић, ученица трећег разреда Математичке гимназије у Београду,
4. Душан Милијанчевић, ученик првог разреда Математичке гимназије у Београду,
5. Бобан Карапетровић, ученик другог разреда Гимназије у Ивањици,
6. Јелена Марковић, ученица другог разреда Математичке гимназије у Београду,

тј. овогодишња екипа Србије за ММО, са изузетком Теодора вон Бурга, који је у то време био на Јуниорској балканској математичкој олимпијади. Његово место заузела је прва резерва екипе, Јелена, и сјајним резултатом показала да се у наредном периоду бити озбиљан кандидат за улаз у екипу. Поред ње, јако добар резултат постигао је и Младен и тиме предвидео свој јако добар резултат на олимпијади (пошто аутори овај извештај састављају након завршетка олимпијаде, већ је познато да је Младен тамо освојио златну медаљу). Марко и Марија су показали добар резултат, а Душан и Бобан да код њих има још доста простора за напредак. Ипак, сви наши ученици су освојили медаље, што се може видети из следеће табеле:

Ученик\Задатак	1	2	3	4	5	6	Укупно	
Младен Радојевић	7	7	7	7	5	7	40	Златна медаља
Марко Јевремовић	7	7	7	7	1	1	30	Сребрна медаља
Марија Јелић	7	7	3	7	0	3	27	Сребрна медаља
Душан Милијанчевић	7	0	0	7	0	6	20	Бронзана медаља
Бобан Карапетровић	7	7	1	7	0	0	22	Бронзана медаља
Јелена Марковић	7	7	7	7	1	5	36	Сребрна медаља

Чини се да је ово такмичење, иако нешто нижег нивоа, доста добро дошло нашој јако младој екипи и да се позитивно одразило на резултат на Међународној математичкој олимпијади, а надамо се и на будуће резултате. Овај пут је искоришћен и за добијање виза за Вијетнам, као и за низ договора са румунском страном о будућој сарадњи.

У наставку дајемо задатке које су ученици решавали на овом такмичењу, као и њихова решења.

Concursul International de Matematica „Arhimede“, IMAC

Букурешт, Румунија, 27. & 28.06.2007.

Задаци:

Први дан

Задатак 1. Нека је низ $(f_n)_{n\geqslant 0}$ дефинисан са $f_0 = 0, f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \geqslant 0$ (Фибоначијев низ) и нека је $t_n = \binom{n+1}{2}$ за $n \geqslant 1$.Доказати да важи:

(а) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$ за $n \geqslant 1$;

(б) $\dfrac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{t_k}{f_k}\right)^2 \geqslant \dfrac{t_{n+1}^2}{9 f_n \cdot f_{n+1}}$ за $n \geqslant 1$.

Задатак 2. Нека је $ABCD$ паралелограм који није ромб. Полуправа симетрична полуправој AD у односу на AC и полуправа симетрична полуправој BC у односу на BD се секу у тачки P. Израчунати $\dfrac{AC}{BD}$, ако је $\dfrac{AP}{BP} = q$.

Задатак 3. Табла $m \times n$ је обојена „шаховски“ црно–бело. У једном кораку бирају се два суседна поља (поља која имају заједничку страницу) и мења им се боја на следећи начин:

- бело поље постаје црно;
- црно поље постаје црвено;
- црвено поље постаје бело.

За које m и n се овим корацима могу променити боје свих почетних поља, белих у црна и црних у бела?

Други дан

Задатак 4. Доказати да за било које целе бројеве a_k, $1 \leqslant k \leqslant 5$, постоје $\lambda_k \in \{-1, 0, 1\}$, $1 \leqslant k \leqslant 5$, који нису сви једнаки нули, тако да

$$11 \mid \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2 + \lambda_4 a_4^2 + \lambda_5 a_5^2.$$

Задатак 5. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $x, y \in \mathbb{R}$ такви да је $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Доказати да је

$$(x^n + y)^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{n+2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)^n.$$

Задатак 6. Нека је $A_1 A_2 \ldots A_n$ полигон. Доказати да постоји конвексан полигон $B_1 B_2 \ldots B_n$ такав да важи $B_i B_{i+1} = A_i A_{i+1}$ за $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ и $B_n B_1 = A_n A_1$ (нека од узастопних темена полигона $B_1 B_2 \ldots B_n$ могу бити колинеарна).

Решења:

Први дан

Задатак 1. (а) Доказ индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење је еквивалентно са $f_1^2 = 1 = f_1 \cdot f_2$ (база индукције). Нека је $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$. Тада је $(f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2) + f_{n+1}^2 = f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} \cdot f_{n+2}$.

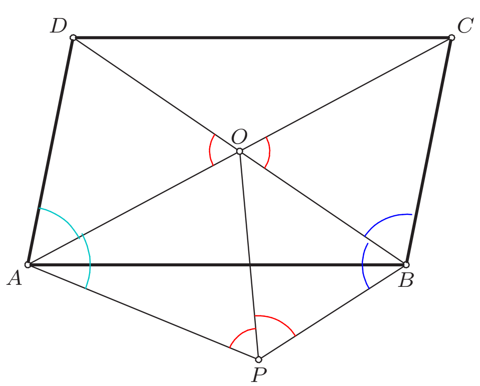
(б) На основу дела (а) и неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског (примењене на n-торке $(f_1, \ldots, f_n)$ и $\left(\frac{f_1}{t_1}, \ldots, \frac{f_n}{t_n}\right)$) следи

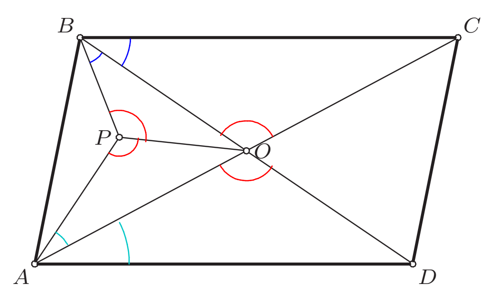
$$\begin{aligned}
f_n f_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{t_k}{f_k}\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{t_k}{f_k}\right)^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{144} \cdot (2n+1+3)^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2(n+2)^2}{36} = \frac{n^2}{9} \cdot t_{n+1}^2,
\end{aligned}$$

одакле следи тврђење задатка. Коришћене су релације $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ и $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Једнакост важи ако и само ако важи једнакост у горе примењеној неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског, тј. ако и само ако су изрази $\dfrac{t_k}{f_k^2}$ константни, што се лако проверава да се догађа само за $n = 1$ ($\dfrac{t_1}{f_1^2} = \dfrac{t_2}{f_2^2} \Leftrightarrow 1 = 3$).

Напомена. Начин решавања дела (б) је донекле исфорсиран давањем дела (а). Међутим, и без њега, део (б) се доказује индукцијом, која је исте тежине као и спроведена у горњем решењу.

Задатак 2. Нека је $d(X, YZ)$ растојање од тачке X до праве одређене тачкама Y и Z. Како су AP и AD симетричне у односу на AO, следи $d(O, AD) = d(O, AP)$, а како су BC и BP симетричне у односу на BO, следи $d(O, BC) = d(O, BP)$, па како је и $d(O, AD) = d(O, BC)$ (O је центар паралелограма $ABCD$), следи $d(O, AP) = d(O, BP)$, тј. права PO је симетрала $\sphericalangle APB$.





Због симетрије, по условима задатка, је $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OAP$ и $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OBP$. Ако је φ унутрашњи угао APB четвороугла $APBO$, тада је $\sphericalangle OAP = \frac{1}{2} \cdot \varphi = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle OAP + \sphericalangle OBP + \sphericalangle AOB) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle OAD + \sphericalangle OBC + (180^\circ - \sphericalangle AOD)) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle OAD + \sphericalangle ODA + (180^\circ - \sphericalangle AOD)) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot ((180^\circ - \sphericalangle AOD) + (180^\circ - \sphericalangle AOD)) = \sphericalangle AOD$, па је $\triangle ADO \sim \triangle APO$ и $\triangle PBO \sim \triangle BCO$.

Из $\triangle ADO \sim \triangle APO$ следи $\dfrac{AP}{AO} = \dfrac{AO}{AD}$, а из $\triangle PBO \sim \triangle BCO$ следи $\dfrac{BP}{BO} = \dfrac{BO}{BC}$. Како је $ABCD$ паралелограм, важи $AD = BC$ и $AC = 2AO$, $BD = 2BO$, тј. $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{AC}{BD}$, па је

$$q = \frac{AP}{BP} = \left(\frac{AO}{BO}\right)^2 \cdot \frac{AC}{BD} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2,$$

односно важи $\dfrac{AC}{BD} = \sqrt{q}$.

Друго решење. Нека је $\sphericalangle OAB = \alpha_1, \sphericalangle OAD = \alpha_2, \sphericalangle OBA = \beta_1, \sphericalangle OBC = \beta_2$. По синусној теореми, из $\triangle ABO$ следи $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}$, а из $\triangle AOD$ (јер је $\sphericalangle ODA = \beta_2$) $\dfrac{AO}{DO} = \dfrac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}$, тј. (како је $AO = DO = \dfrac{1}{2}\cdot AC$ и $BO = \dfrac{1}{2}\cdot BD$) следи

$$\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}\,. \tag{$\dagger$}$$

Како је $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 180^\circ$, следи да је $\sin(\alpha_2 + \beta_1) = \sin(\alpha_1 + \beta_2)$, тј.

$$\sin\alpha_2\cos\beta_1 - \sin\alpha_1\cos\beta_2 = \sin\beta_2\cos\alpha_1 - \sin\beta_1\cos\alpha_2. \tag{$\ddagger$}$$

Ако су β_1 и β_2 углови у паралелограму тако да је $\beta_1+\beta_2 \geqslant 90^\circ$, тада је $\sin\beta_1 \geqslant \sin\beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 \geqslant \beta_2$ (ако би било $\sin\beta_1 \geqslant \sin\beta_2$ и $\beta_1 < \beta_2$, тада би било $\beta_2 \geqslant 180^\circ - \beta_1$, тј. $\beta_1 + \beta_2 \geqslant 180^\circ$), па је $\beta_1 \geqslant \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Следи да су углови наспрам PB и PA једнаки или $\alpha_2 - \alpha_1$ и $\beta_2 - \beta_1$ или $\alpha_1 - \alpha_2$ и $\beta_1 - \beta_2$, редом. У сваком случају је, на основу ($\dagger$) и ($\ddagger$):

$$\begin{aligned}
\frac{AP}{BP} &= \frac{\sin(\beta_2-\beta_1)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} = \frac{\sin\beta_2\cos\beta_1 - \sin\beta_1\cos\beta_2}{\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2} \\
&= \frac{\sin\beta_2\cos\beta_1 - \cos\beta_2\cdot\dfrac{\sin\beta_2\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}}{\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\cdot\dfrac{\sin\beta_1\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}} \\
&= \left(\frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}\right)^2\cdot\frac{\sin\alpha_2\cos\beta_1 - \sin\alpha_1\cos\beta_2}{\sin\beta_2\cos\alpha_1 - \sin\beta_1\cos\alpha_2} = \left(\frac{AC}{BD}\right)^2,
\end{aligned}$$

тј. $\dfrac{AC}{BD} = \sqrt{\dfrac{AP}{BP}} = \sqrt{q}$.

Треће решење. Нека је дата конфигурација смештена у комплексну раван, тако да тачки A одговара комлексан број a, тачки B број b, а тачки O број 0. Тада тачки C одговара $-a$, а тачки D број $-b$. Тачка z припада правој симетричној са AD у односу на AC ако је број $\dfrac{(-b)-a}{0-a}\cdot\dfrac{z-a}{0-a}$ реалан, тј. ако је

$$\begin{aligned}
\frac{a-b}{a}\cdot\frac{z-a}{-a} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{a}}\cdot\frac{\overline{z}-\overline{a}}{-\overline{a}} \quad &\Leftrightarrow \quad z(a+b)\overline{a}^2 - a\overline{a}^2(a+b) = \overline{z}(\overline{a}+\overline{b})a^2 - \overline{a}a^2(\overline{a}+\overline{b}) \\
z(a+b)\overline{a}^2 - ab\overline{a}^2 \quad &= \quad \overline{z}(\overline{a}+\overline{b})a^2 - \overline{a}\overline{b}a^2
\end{aligned}$$

и, аналогно, правој која је симетрична у односу на BC у односу на BD ако је

$$z(a+b)\overline{b}^2 - ab\overline{b}^2 = \overline{z}(\overline{a}+\overline{b})b^2 - \overline{a}\overline{b}b^2,$$

па се број p (који одговара тачки P) добија елиминисањем $\overline{z}$ из горњих једначина, тј. p задовољава једначину

$$p(a+b)(\overline{a}^2b^2 - a^2\overline{b}^2) = ab(\overline{a}^2b^2 - a^2\overline{b}^2).$$

Како је $a, b \neq 0$ и, при тим условима $\overline{a}^2 b^2 - a^2 \overline{b}^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{\overline{b}}{b}\right)^2$, што је тачно или када су тачке A, O и B колинеарне или када су AO и BO нормалне (тј. када је $ABCD$ ромб), следи да је $\overline{a}^2 b^2 - a^2 \overline{b}^2 \neq 0$, тј. $p = \dfrac{ab}{a+b}$. Коначно, $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{|2a|}{|2b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$ и

$$q = \frac{AP}{BP} = \frac{|p-a|}{|p-b|} = \frac{\left|\frac{ab}{a+b} - a\right|}{\left|\frac{ab}{a+b} - b\right|} = \left|\frac{a}{b}\right|^2,$$

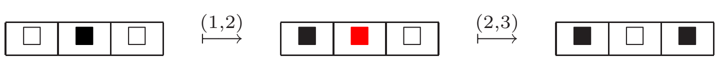
па је $\dfrac{AC}{BD} = \sqrt{q}$.

Напомена. У решавању овог задатка треба бити јако пажљив да решење покрива и ситуацију када је тачка P унутар и када је ван паралелограма $ABCD$.

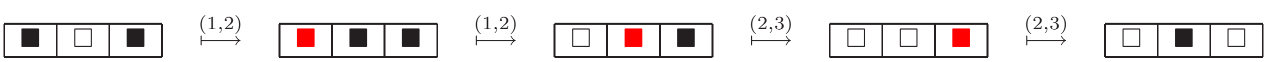
Задатак 3. Нека се на табли $m \times n$ после коначно много корака могу променити боје на тражени начин. Нека је број белих поља у почетном бојењу b, а црних c. Како је почетно i-то бело поље у завршном бојењу црно, на њему је спроведено $3s_i + 1$ операција (за неко $s_i \in \mathbb{N}_0$). Слично, на i-том црном пољу је спроведено $3t_i + 2$ операције (за неко $t_i \in \mathbb{N}_0$).

Како сваки пар суседних поља узима једно поље које је у почетку било бело и једно поље које је у почетку било црно, следи да је $\sum_{i=1}^{b}(3s_i + 1) = \sum_{i=1}^{c}(3t_i + 2)$, одакле је $b - 2c = 3 \cdot \sum_{i=1}^{c} t_i - 3 \cdot \sum_{i=1}^{b} s_i$, односно $3 \mid b - 2c$, тј. $3 \mid b + c = mn$, па бар један од m и n мора бити дељив са 3.

Са друге стране, ако је неки од m и n дељив са три, табла $m \times n$ се може разрезати на табле 1×3 (или 3×1), па како на оваквој табли може спровести тражена замена:



и



,

следи тврђење задатка.

Други дан

Задатак 4. Важи и општије тврђење:

Нека је $p \geqslant 5$ прост број и $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ цели бројеви. Тада постоје $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\frac{p-1}{2}} \in \{-1, 0, 1\}$, који нису сви једнаки нули, тако да

$$p \mid \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \ldots + \lambda_{\frac{p-1}{2}} a_{\frac{p-1}{2}}^2 .$$

Доказ. Ако постоји a_i дељив са p, може се узети $\lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{за } k = i \\ 0, & \text{за } k \neq i \end{cases}$. Ако постоје a_i и a_j $(i \neq j)$ чији квадрати дају исти остатак при дељењу са p, може се узети $\lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{за } k = i \\ -1, & \text{за } k = j \\ 0, & \text{за } j \neq i, j \end{cases}$.

Међутим, како квадрати бројева конгруентних са i и $-i$ при дељењу са p дају исти остатак, ако ниједан од $\left\{a_i^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant \frac{p-1}{2}\right\}$ није дељив са p и ако никоја два из овог скупа не дају исти остатак при дељењу са p, скупови $\left\{a_i^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant \dfrac{p-1}{2}\right\}$ и $\left\{i^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant \dfrac{p-1}{2}\right\}$ чине исти систем остатака при дељењу са p. Избором $\lambda_k = 1$ за $1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}$ следи

$$\begin{aligned}\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \ldots + \lambda_{\frac{p-1}{2}} a_{\frac{p-1}{2}}^2 &\equiv 1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{\frac{p-1}{2} \cdot \left(\frac{p-1}{2}+1\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{p-1}{2}+1\right)}{6} \\ &= p \cdot \frac{p^2-1}{12} \equiv 0 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Задатак 5. За $x = y = 0$ обе стране неједнакости су једнаке нули. Иначе, сменом $x = r\cos\varphi, y = r\sin\cos\varphi$ за $0 < r \leqslant 1, 0 \leqslant \cos\varphi < 2\pi$, једнакост се своди на

$$\cos^{2n}\varphi + 2r^{1-n}\cos^n\varphi\sin\varphi + 2r^{2-2n}\sin^2\varphi \geqslant \frac{1}{n+2}, \quad \text{за} \quad 0 < r \leqslant 1, 0 \leqslant \cos\varphi < 2\pi, n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

У наставку се разликују ситуације:

1. ако је $\sin^2\varphi \geqslant \dfrac{1}{n+2}$, важи $r^{2-2n}\sin^2\varphi \geqslant \dfrac{1}{n+2}$, а из неједнакости између аритметичке и геометријске средине, следи

$$\cos^{2n}\varphi + r^{2-2n}\sin^2\varphi \geqslant \left|2r^{1-n}\cos^n\varphi\sin\varphi\right| \geqslant -2r^{1-n}\cos^n\varphi\sin\varphi,$$

   па се сабирањем добија $(*)$;

2. ако је $\sin^2\varphi < \dfrac{1}{n+2}$, слично као и малопре, из неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи

$$\frac{1}{2} \cdot \cos^{2n}\varphi + 2r^{2-2n}\sin^2\varphi \geqslant \left|2r^{1-n}\cos^n\varphi\sin\varphi\right| \geqslant -2r^{1-n}\cos^n\varphi\sin\varphi,$$

   а из Бернулијеве неједнакости

$$\frac{1}{2} \cdot \cos^{2n}\varphi = \frac{1}{2} \cdot (1 - \sin^2\varphi)^n > \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n \geqslant \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2},$$

   па се опет сабирањем добија $(*)$.

Из горњег разматрања следи тражена неједнакост. Јасно је да у другој ситуацији једнакост не може да важи, а да би важила у првој, мора бити $\sin^2\varphi = \dfrac{1}{n+2}$, $r = 1$, $\cos^{2n}\varphi = r^{2-2n}\sin^2\varphi$ и $\cos^n\varphi\sin\varphi \leqslant 0$, одакле је $\cos^2\varphi = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n+2}}$, па се из $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ добија $(n+1)^n = (n+2)^{n-1}$. Последње није тачно, провером за $n = 1$, а за $n > 1$ зато што природни степени два узајамно проста броја не могу бити једнаки. Дакле, једнакост важи ако и само ако је $(x, y) = (0, 0)$.

Задатак 6. Означимо $A_iA_{i+1} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$ $(A_{n+1} = A_1)$. Нека је без смањења општости a_1 највећа страница. Доказаћемо да ако је $a_1 < a_2 + \cdots + a_n$ тада постоји тетиван n-тоугао са страницама $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
За свако $r \geq \frac{a_1}{2}$ дефинишимо

$$f(r) = \arcsin\frac{a_2}{2r} + \arcsin\frac{a_3}{2r} + \cdots + \arcsin\frac{a_n}{2r}.$$

Јасно је да ако је $f(r) = \arcsin\frac{a_1}{2r}$ или $f(r) = \pi - \arcsin\frac{a_1}{2r}$ за неко r, тада постоји конвексан n-тоугао страница $a_1, \ldots, a_n$ који је уписан у круг полупречника r. Тврдимо да такво r увек постоји.
Приметимо прво да из $\frac{a_1}{2r} < \frac{a_2}{2r} + \cdots + \frac{a_n}{2r}$ следи да за довољно велике r важи $\arcsin\frac{a_1}{2r} < f(r)$ и $f(r) \to 0$ кад $r \to \infty$. Дакле, за неко r, $f(r)$ лежи у унутрашњости интервала $I_r = [\arcsin\frac{a_1}{2r}, \pi - \arcsin\frac{a_1}{2r}]$. С друге стране, за $r = \frac{a_1}{2}$ интервал I_r садржи само једну тачку: $\frac{\pi}{2}$, и у том случају $f(r)$ не лежи унутар

I_r. Како је $f(r)$ непрекидно по r, закључујемо да за неко $r \geq \frac{a_1}{2}$ тачка $f(r)$ лежи тачно на једној од граница интервала I_r, што смо и тврдили.

Друго решење. Нека су темена полигона $A_1A_2\dots A_n$ обележена тако да је $A_nA_1(=a)$ најдужа страница тог полигона и нека су $(x_k)_{k=1}^n$ и $(y_k)_{k=1}^n$ дефинисани са $x_1 = 0$, $x_k = \sum_{j=1}^{k-1} A_jA_{j+1}$ за $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ и $y_n = 0$, $y_k = \sum_{j=k}^{n-1} A_jA_{j+1}$ за $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Како је $(x_k)_{k=1}^n$ строго растући, а $(y_k)_{k=1}^n$ строго опадајући, следи да је $(x_k - y_k)_{k=1}^n$ строго растући, па како је $x_1 - y_1 < 0$ и $x_n - y_n > 0$, следи да постоји $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, тако да је $x_l - y_l \leqslant 0$ и $x_{l+1} - y_{l+1} > 0$. Како је $(x_{i+1} - y_{i+1}) - (x_i - y_i) = (x_{i+1} - x_i) + (y_i - y_{i+1}) = A_iA_{i+1} + A_iA_{i+1} \leqslant 2a$ за $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, два узастопна члана низа $(x_k - y_k)_{k=1}^n$ се разликују највише за $2a$, па се разликују следеће ситуације:

1. $x_{l+1} - y_{l+1} = a$ и $x_l - y_l = -a$. Тада је $A_lA_{l+1} = a$ и $x_l = y_{l+1}$, па се може конструисати правоугаоник са страницама A_1A_n, x_l, A_lA_{l+1}, y_{l+1}, редом (дакле, конвексан четвороугао);

2. $(\exists i)|x_i - y_i| < a$. Нека је $b = x_l$ и $c = y_l$. Тада је (по неједнакости троугла) $|b - c| = |x_i - y_i| < a = A_1A_n < A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = b + c$, тј. постоји троугао чије су странице a, b и c (наравно, троугао је конвексан полигон).

Из претходног разматрања следи тврђење задатка.