Serbian version

Први дан
25. јул 2007.

1. задатак. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви. За свако i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ нека је

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j \mid i \leqslant j \leqslant n\}$$

и нека је

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(а) Доказати да за произвољне реалне бројеве $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ важи

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(б) Доказати да постоје реални бројеви $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ такви да се у $(*)$ достиже једнакост.

2. задатак. Нека су тачке A, B, C, D и E такве да је $ABCD$ паралелограм, а $BCED$ тетиван четвороугао. Нека је ℓ права која садржи тачку A и сече дуж DC у њеној унутрашњој тачки F, а праву BC у тачки G. Нека је и $EF = EG = EC$. Доказати да је ℓ симетрала угла DAB.

3. задатак. На математичком такмичењу неки ученици су пријатељи; ако је A пријатељ са B, тада је и B пријатељ са A. Група ученика се назива *дружина* ако су свака два ученика у тој групи пријатељи. (Специјално, свака група са мање од два ученика је дружина.) Број ученика у дружини назива се њеном *величином*.

На овом такмичењу максимална величина дружине је паран број. Доказати да се ученици могу распоредити у две собе, тако да је максимална величина дружине у једној соби једнака максималној величини дружине у другој соби.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

Serbian version

Други дан
26. јул 2007.

4. задатак. Симетрала угла BCA троугла ABC сече његову описану кружницу по други пут у R, а симетрале страница BC и AC у P и Q, редом. Нека су K и L средишта страница BC и AC, редом. Доказати да су површине троуглова RPK и RQL једнаке.

5. задатак. Нека су a и b природни бројеви. Ако $4ab-1$ дели $(4a^2-1)^2$ доказати да је $a=b$.

6. задатак. Нека је n природан број. Нека је

$$S = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \{0,1,\dots,n\},\ x+y+z > 0\}$$

скуп који се састоји од $(n+1)^3-1$ тачака тродимензионалног простора. Одредити најмањи могући број равни, чија унија садржи све тачке скупа S, а не садржи тачку $(0,0,0)$.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена