48. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Ханој, Вијетнам, 25. & 26. јул 2007.

Задаци:

Први дан

Задатак 1. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви. За свако i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ нека је

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j \mid i \leqslant j \leqslant n\}$$

и нека је

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(а) Доказати да за произвољне реалне бројеве $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ важи

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(б) Доказати да постоје реални бројеви $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ такви да се у $(*)$ достиже једнакост.

(Нови Зеланд)

Задатак 2. Нека су тачке A, B, C, D и E такве да је $ABCD$ паралелограм, а $BCED$ тетиван четвороугао. Нека је ℓ права која садржи тачку A и сече дуж DC у њеној унутрашњој тачки F, а праву BC у тачки G. Нека је и $EF = EG = EC$. Доказати да је ℓ симетрала угла DAB. (Луксембург)

Задатак 3. На математичком такмичењу неки ученици су пријатељи; ако је A пријатељ са B, тада је и B пријатељ са A. Група ученика се назива *дружина* ако су свака два ученика у тој групи пријатељи. (Специјално, свака група са мање од два ученика је дружина.) Број ученика у дружини назива се њеном *величином*.

На овом такмичењу максимална величина дружине је паран број. Доказати да се ученици могу распоредити у две собе, тако да је максимална величина дружине у једној соби једнака максималној величини дружине у другој соби. (Русија)

Други дан

Задатак 4. Симетрала угла BCA троугла ABC сече његову описану кружницу по други пут у R, а симетрале страница BC и AC у P и Q, редом. Нека су K и L средишта страница BC и AC, редом. Доказати да су површине троуглова RPK и RQL једнаке. (Чешка)

Задатак 5. Нека су a и b природни бројеви. Ако $4ab - 1$ дели $(4a^2 - 1)^2$ доказати да је $a = b$.

(Велика Британија)

Задатак 6. Нека је n природан број. Нека је

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\},\ x + y + z > 0\}$$

скуп који се састоји од $(n+1)^3 - 1$ тачака тродимензионалног простора. Одредити најмањи могући број равни, чија унија садржи све тачке скупа S, а не садржи тачку $(0, 0, 0)$. (Холандија)

Решења:

Први дан

Задатак 1. По условима задатка је $d = a_k - a_l$ за неке $k \leqslant l$. Како је $(x_l - a_l) - (x_k - a_k) = (a_k - a_l) + (x_l - x_k) \geqslant a_k - a_l = d$ и $d \geqslant 0$, следи

$$|x_k - a_k| + |x_l - a_l| \geqslant |(a_k - x_k) - (a_l - x_l)| \geqslant \frac{d}{2},$$

односно $\max\{|x_k - a_k|, |x_l - a_l|\} \geqslant \dfrac{d}{2}$, одакле следи (а).

Јасно је да низ који задовољава (б) зависи од израза $M_i = \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant i\}$ и $m_i = \min\{a_j \mid i \leqslant j \leqslant n\}$. У жељи да се минимизује израз са леве стране $(*)$, природно је покушати са $x_i = \dfrac{m_i + M_i}{2}$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Овај низ задовољава услове из (б):

1. по конструкцији, низови $(m_i)_{i=1}^n$ и $(M_i)_{i=1}^n$ су неопадајући, па је такав и $(x_i)_{i=1}^n$;
2. како је $d_i = M_i - m_i$, имамо

$$-\frac{d_i}{2} = \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \leqslant x_i - a_i \leqslant x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2}\,,$$

   тј. $|x_i - a_i| \leq \dfrac{d_i}{2} \leq \dfrac{d}{2}$, одакле је $\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant \dfrac{d}{2}$, па уз (а) следи (б).

Напомена. Могуће су и друге конструкције низа који задовољава (б), на пример

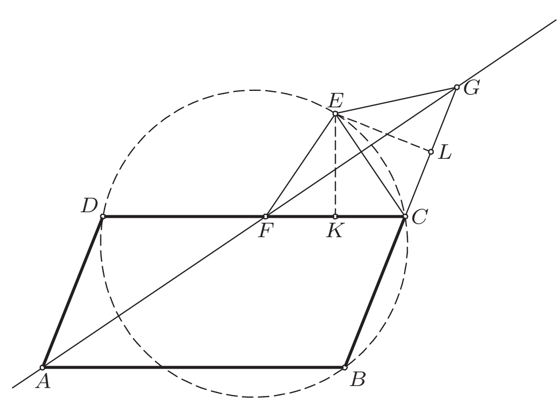
$$x_1 = a_1 - \frac{d}{2}\,, \qquad x_i = \max\left\{x_{i-1}, a_i - \frac{d}{2}\right\} \quad \text{за} \quad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Заиста, из саме дефиниције следи да је $(x_i)_{i=1}^n$ неопадајући и $x_i - a_i \geqslant -\dfrac{d}{2}$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Важи и $x_i = x_j = a_j - \dfrac{d}{2}$ за неко $j \leqslant i$ (заправо, j је најмањи индекс за који важи $x_j = x_i$), па како је $a_j - a_i \leqslant \max\{a_k \mid 1 \leqslant k \leqslant i\} - \min\{a_k \mid i \leqslant k \leqslant n\} = d_k \leqslant d$, следи да је

$$x_i - a_i = a_j - \frac{d}{2} - a_i = (a_j - a_i) - \frac{d}{2} \leqslant d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}\,,$$

тј. $-\dfrac{d}{2} \leqslant x_i - a_i \leqslant \dfrac{d}{2}$ за све $1 \leqslant i \leqslant n$, одакле је $\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant \dfrac{d}{2}$. Како је $|x_1 - a_1| = \dfrac{d}{2}$, у $(*)$ важи једнакост (или опет из (а)).

Задатак 2. Нека су K и L подножја нормала из E на DC и BC, редом. Како су $\triangle EFC$ и $\triangle ECG$ једнакокраки, K и L су средишта дужи FC и CG, редом, и важи $\triangle KCL \sim \triangle FCG$. Означимо $\sphericalangle BAF = \alpha$ и $\sphericalangle DAF = \beta$. Из тетивности четвороугла $EKCL$ и става о угловима са паралелним крацима следи да је $\sphericalangle LEC = \sphericalangle LKC = \sphericalangle GFC = \alpha$ и $\sphericalangle CEK = \sphericalangle CLK = \sphericalangle CGF = \beta$.



У правоуглим троугловима EKC и CLE важи $CK = CE\sin\beta$, $EK = CE\cos\beta$, $CL = CE\sin\alpha$, $EL = CE\cos\alpha$.

Означимо $\dfrac{DF}{FC} = \dfrac{DA}{CG} = r$ (очигледно је $\triangle DAF \sim \triangle CGF$). Тада је $DF = rFC = 2rCK$ и $BC = DA = rCG = 2rCL$, и одатле $BL = BC + CL =$

$(2r+1)CL=(2r+1)CE\sin\alpha$ и $DK=DF+FK=(2r+1)CK=(2r+1)CE\sin\beta$.

Како је четвороугао $DBCE$ тетиван, важи $\sphericalangle EDK=\sphericalangle EDC=\sphericalangle EBC=\sphericalangle EBL$, дакле $\operatorname{tg}\sphericalangle EDK=\operatorname{tg}\sphericalangle EBL$. Међутим, из правоуглог $\triangle EDK$ следи $\operatorname{tg}\sphericalangle EDK=\dfrac{EK}{DK}=\dfrac{CE\cos\beta}{(2r+1)CE\sin\beta}=\dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{2r+1}$, а из правоуглог $\triangle BLE$ је $\operatorname{tg}\sphericalangle EBL=\dfrac{EL}{BL}=\dfrac{CE\cos\alpha}{(2r+1)CE\sin\alpha}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{2r+1}$, па мора бити $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$ и отуда $\alpha=\beta$, тј. $\ell=AF$ је симетрала $\sphericalangle DAB$.

Друго решење. Нека је дата конфигурација смештена у комплексну раван, тако да је кружница са центром у E и полупречника EC јединична и нека тачкама обележеним неким великим латиничном словом одговара комплексан број означен малим латиничним словом. По условима задатка важи $e=0$ и $|c|=|f|=|g|=1$.

Као и у првом решењу, $\sphericalangle CFG=\sphericalangle BAF$ и $\sphericalangle CGF=\sphericalangle FAD$, па је довољно показати да је $\triangle CGF$ једнакокраки, тј. да је $CE=CF\Leftrightarrow|c-g|=|c-f|\Leftrightarrow(c-g)(\overline{c}-\overline{g})=(c-g)(\overline{c}-\overline{f})\Leftrightarrow\overline{c}(g-f)=c(\overline{f}-\overline{g})=-c\cdot\dfrac{g-f}{fg}\Leftrightarrow c^2=fg$ (c,f и g су различити бројеви са јединичне кружнице).

> *Лема.* *Ако тачка $Z\neq X,Y$ припада правој одређеној тачкама X и Y ($X\neq Y$) са јединичне кружнице, тада је $x+y=z+xy\overline{z}$.*
>
> *Доказ.* За x, такво да је $|x|=1$ важи $\overline{x}=\frac{1}{x}$, па Z припада XY ако и само ако је $\dfrac{z-x}{\overline{z-x}}=\dfrac{y-x}{\overline{y-x}}=\dfrac{y-x}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=-xy$, одакле се лако добија тврђење леме.

Из леме, примењене на $D\in FC$, $B\in GC$ и $A\in FG$, следи

$$c+f=d+cf\overline{d}\tag{1}$$

$$c+g=b+cg\overline{b}\tag{2}$$

$$f+g=a+fg\overline{a}.\tag{3}$$

Из (1) следи $\overline{d-c}=\overline{f(1-c\overline{d})}=\overline{f}(1-\overline{c}d)=-\dfrac{1}{cf}(d-c)$, а, аналогно, из (2) следи $\overline{b-c}=-\dfrac{1}{cg}(b-c)$. Из тетивности четвороугла $BCED$ следи $\sphericalangle BED=\sphericalangle BCD\Leftrightarrow\dfrac{\frac{0-b}{\overline{0-b}}}{\frac{0-d}{\overline{0-d}}}=\dfrac{\frac{c-b}{\overline{c-b}}}{\frac{c-d}{\overline{c-d}}}=\dfrac{-cg}{-cf}$, односно

$$\frac{b}{\overline{b}}=\frac{d}{\overline{d}}\cdot\frac{g}{f}.\tag{4}$$

Из (1), (2) и (4) следи $\dfrac{c+f-d}{c}=d\overline{f}=\dfrac{gd\overline{b}}{b}$, тј. $b(c+f)=d(b+cg\overline{b})\Leftrightarrow\dfrac{b}{d}=\dfrac{c+g}{c+f}$, одакле је $\dfrac{\overline{b}}{\overline{d}}=\dfrac{\overline{c+g}}{\overline{c+f}}=\dfrac{f}{g}\cdot\dfrac{c+g}{c+f}$, тј.

$$cf\overline{d}-fg\overline{b}=cg\overline{b}-fg\overline{d}.\tag{5}$$

Из $(1)+(2)-(3)$, користећи $a=b+d-c$ (јер је $ABCD$ паралелограм), следи

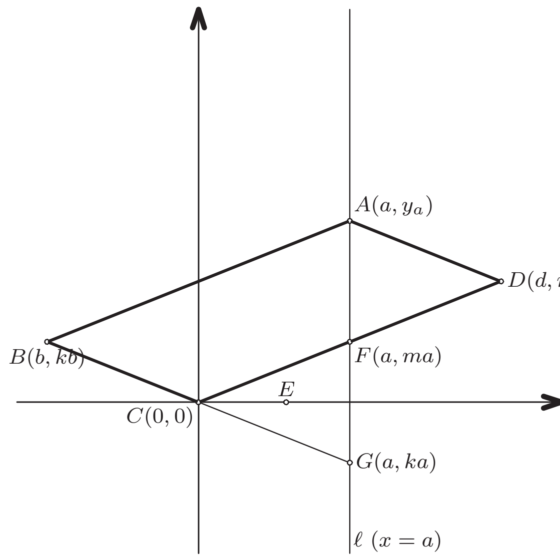
$$2c=b+d-(b+d-c)+cf\overline{d}+cg\overline{b}-fg\overline{(b+d-c)},$$

односно (користећи и (5))

$$\begin{aligned}c-fg\overline{c}&=cf\overline{d}-fg\overline{b}+cg\overline{b}-fg\overline{d}=2(cf\overline{d}-fg\overline{b})\\&=2\overline{b}\left(cf\frac{\overline{d}}{\overline{b}-fg}\right)=2\overline{b}\left(cf\cdot\frac{g}{f}\cdot\frac{c+f}{c+g}-fg\right)=\frac{2g\overline{b}}{c+g}\cdot(c^2-fg),\end{aligned}$$

одакле је $0=(c^2-fg)\cdot\left(\dfrac{2cg\overline{b}}{c+g}-1\right)$, па је за тврђење задатка још довољно показати да је други чинилац у последњој једнакости различит од нуле. Међутим, користећи (2), из ње следи $c+g=2cg\overline{b}=2(c+g-b)$, тј. $b=\dfrac{c+g}{2}$, што је немогуће (по условима задатка је $B-C-G$, па B не може бити средиште дужи CG).

Треће решење. Нека је дата конфигурација смештена у координатну раван, тако да је тачка C координатни почетак, а права ℓ паралелна y-оси.



Нека су координате тачке $B(b, kb)$, тачке $D(d, md)$, а тачке $A(a, y_a)$.

Следи да су координате тачке $F(a, ma)$, тачке $G(a, ka)$. Како је $EF = EG$, координате тачке E су $\left(x_e, \dfrac{k+m}{2} \cdot a\right)$, а из $EC = EF$ следи

$$x_e^2 + \left(\frac{k+m}{2} \cdot a\right)^2 = (x_e - a)^2 + \left(ma - \frac{k+m}{2} \cdot a\right)^2,$$

одакле је $x_e = \dfrac{1-km}{2}$.

Како је четвороугао $BCED$ тетиван, следи $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CDE$.

Нека је k_{XY} коефицијент правца праве XY. Како је

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \sphericalangle CBE &= \frac{k_{BE} - k_{BC}}{1 + k_{BE}k_{BC}} = \frac{\frac{\frac{k+m}{2} \cdot a - kb}{\frac{1-km}{2} \cdot a - b} - k}{1 + k \cdot \frac{\frac{k+m}{2} \cdot a - kb}{\frac{1-km}{2} \cdot a - b}} = \frac{\frac{k+m}{2} \cdot a - kb - k \cdot \left(\frac{1-km}{2} \cdot a - b\right)}{\frac{1-km}{2} \cdot a - b + k \cdot \left(\frac{k+m}{2} \cdot a - kb\right)} \\
&= \frac{\frac{am}{2} \cdot (1+k^2)}{\left(\frac{a}{2} - b\right) \cdot (1+k^2)} = \frac{am}{a-2b} \qquad \text{и, аналогно,}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle CDE = \frac{ak}{a-2d} = -\frac{ak}{a-2b}$$

(јер је $d = a - b$, пошто је $ABCD$ паралелограм), следи да је $k = -m$. То значи да је $\triangle CFG$ једнакокраки, одакле, као и у претходним решењима, следи тврђење задатка.

Четврто решење. Нека су ознаке исте као у првом решењу и нека је O пресек дијагонала паралелограма $ABCD$. Тачка E припада кружници описаној око $\triangle BCD$, па нормале из E на странице овог троугла припадају једној правој (Симпсонова права). Како је KL средња линија $\triangle CGF$ и како су тачке A, F и G на једној правој, права KL пролази кроз средиште AC, тј. кроз O. Следи да је нормална пројекција из E на BD управо O, тј. важи $\sphericalangle DBE = \sphericalangle EDB$.

Међутим, као у првом решењу добијамо $\sphericalangle FAD = \sphericalangle CGF = \sphericalangle CLK = \sphericalangle CEK = 90^\circ - \sphericalangle ECK = 90^\circ - \sphericalangle ECD = 90^\circ - \sphericalangle EBD$ и $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CFG = \sphericalangle CKL = \sphericalangle CEL = 90^\circ - \sphericalangle LCE = 90^\circ - \sphericalangle EDB$, тј. $\sphericalangle DAF = \sphericalangle BAF$, што је и требало доказати.

Задатак 3. За почетак сместимо све ученике једне од дружина максималне величине $2n$ у собу X. Назовимо ове ученике *П–ученицима.* Остале ученике сместимо у собу Y. Нека су $d(X)$ и $d(Y)$ максималне величине дружина у собама X и Y у датом моменту, редом. Пребацивањем једног ученика из собе X у собу Y величина $d(X)$ се смањује за 1, а $d(Y)$ се не мења или повећава за 1, па се разлика $d(X) - d(Y)$ смањује за 1 или 2. Понављањем овог поступка можемо постићи да ова разлика буде 0 (чиме би било доказано тврђење задатка) или -1 (тј. $d(Y) = d(X) + 1$).

Надаље претпостављамо да је $d(X) = l$ и $d(Y) = l + 1$. Разликујемо следеће случајеве:

1. Ако у соби Y постоји П–ученик који не припада некој од дружина у Y величине $l + 1$, након његовог пребацивања у собу X остаје $d(Y) = l + 1$, али се $d(X)$ повећава за 1, чиме се постиже $d(X) = d(Y)$.

2. Претпоставимо да сваки од $2n-l$ П–ученика у Y припада свим дружинама величине $l+1$ у Y. Тада произвољна дружина величине $l+1$ у соби Y садржи $2n-l$ П–ученика и $0 \leqslant l+1-(2n-l) = 2(n-l)+1$ ученика који нису П–ученици (назовимо их *не-П–ученицима*). Како је $2(n-l)+1 \neq 0$, у свакој дружини величине $l+1$ у Y постоји не-П–ученик.

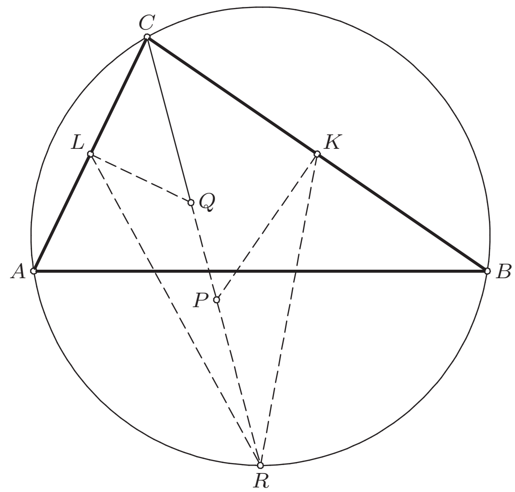
   Сада одаберимо неку дружину у Y величине $l+1$ и пребацимо једног не-П–ученика из ње у X. Понављамо овај поступак док год постоје дружине величине $l+1$ у Y (а њих је коначно много). Како се $d(Y)$ приликом сваког оваквог потеза не мења или смањује за 1, у једном моменту ће важити $d(Y)=l$. Довољно је показати да након овог поступка остаје $d(X)=l$.

   Заиста, претпоставимо да се у X створила дружина величине $l+1$. Тада сви ученици те дружине познају свих $2n-l$ П–ученика у Y (јер сви су они или П–ученици, или су пребачени из Y где су били у дружини са ових $2n-l$ ученика), па њихова унија са ових $2n-l$ ученика чини дружину величине $(l+1)+(2n-l)=2n+1>2n$, што је немогуће.

Овим разматрањем је доказано тврђење задатка.

Други дан

Задатак 4. Нека су одговарајући углови $\triangle ABC$ α, β и γ, одговарајуће странице a, b и c, а R_o полупречник описане кружнице. Како је $\sphericalangle QCL = \dfrac{\gamma}{2}$, имамо $\sphericalangle RQL = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$ и такође $LQ = CL \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = R_o \sin\beta \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ и $CQ = \dfrac{CL}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{R_o\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. Како је $\sphericalangle CAR = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BAR = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BCA = \alpha + \dfrac{\gamma}{2}$, следи



$$\begin{aligned} QR = CR - CQ &= 2R_o \sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{R_o \sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}} \\ &= \frac{R_o}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(2\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\beta\right) \\ &= \frac{R_o}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot (\sin(\alpha+\gamma) + \sin\alpha - \sin\beta) = \frac{R_o \sin\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}, \end{aligned}$$

па је
$$\begin{aligned} P(\triangle RQL) &= \frac{LQ\cdot QR \cdot \sin\sphericalangle RQL}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot R_o \sin\beta \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{R_o\sin\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= \frac{R_o^2 \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{2} \cdot \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

По симетрији, заменом одговарајућих елемената који одговарају теменима A и B добија се $P(\triangle RKP) = \dfrac{R_o^2 \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{2}\sin\beta\sin\alpha$, одакле следи тврђење задатка.

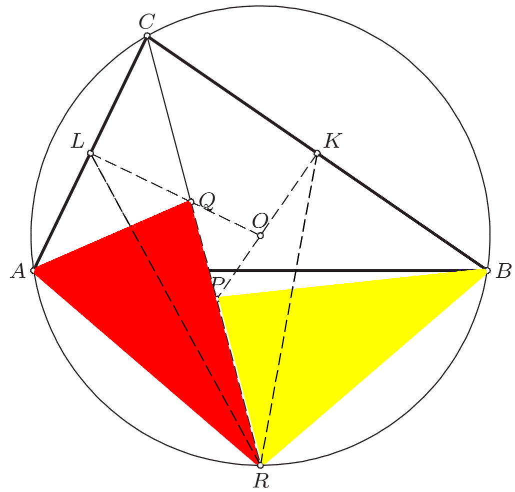
Друго решење. Праве KP и QL се секу у центру O описаног круга $\triangle ABC$. Тада је $OP = OQ$. Заиста, ако је $AB = AC$, тада је $O \equiv P \equiv Q$; у супротном, ако ради једноставности узмемо да је $AC < AB$, имамо $\sphericalangle OQP = \sphericalangle CQL = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2} = \sphericalangle CPK = \sphericalangle QPO$, па је $OP = OQ$.

Такође је $\sphericalangle RQL = \sphericalangle RPK = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$, па је

$$P(\triangle RQL) = \frac{1}{2}RQ\cdot QL \sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2}RQ\cdot QC\sin\frac{\gamma}{2}\sin\left(90^\circ+\frac{\gamma}{2}\right);$$

аналогно је $P(\triangle RPK) = \dfrac{1}{2}RP\cdot PC \sin\dfrac{\gamma}{2}\sin\left(90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}\right)$, па остаје да се покаже да је $RQ\cdot QC = RP\cdot PC$, тј. да су потенције тачака Q и P у односу на описани круг $\triangle ABC$ једнаке. Како су ове потенције једнаке редом $R_o^2 - OQ^2$ и $R_o^2 - OP^2$, ово одмах следи јер је $OQ = OP$.

Треће решење. Нека су ознаке као у другом решењу. Ако је $AB = AC$, тада је $O \equiv P \equiv Q$, иначе се, без умањења општости, може претпоставити да је $AC < AB$. Као и у другом решењу је $\triangle OPQ$ једнакокраки.



Троуглови RQL и RQA имају заједничку страницу (RQ), а висине на ту страницу се, по Талесовој теореми, односе као $\dfrac{CL}{CA} = \dfrac{1}{2}$, па је $P(\triangle RQA) = 2P(\triangle RQL)$. Аналогно се добија да је $P(\triangle RBP) = 2P(\triangle RKP)$, па је довољно доказати да је $P(\triangle RQA) = P(\triangle RBP)$. Међутим, последње је тачно, јер се ротацијом $\mathcal{R}$ око O за угао γ троугао RQA пресликава у троугао RBP ($OA = OR = R_o$, $\sphericalangle ROA = 2\sphericalangle RCA = \gamma$ и $\sphericalangle ROB = 2\sphericalangle RCB = \gamma$, па је $\mathcal{R}(A) = R$ и $\mathcal{R}(R) = B$; у $\triangle OPQ$ је $OP = OQ$ и $\sphericalangle POQ = 180^\circ - 2\cdot\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \gamma$, па је $\mathcal{R}(Q) = P$).

Задатак 5. Важи и општије тврђење:

Нека је $k > 1$ природан број. Ако $kab - 1$ дели $(ka^2-1)^2$, тада је $a = b$.

Назовимо пар природних бројева (a, b) *добрим* ако $kab - 1 \mid (ka^2-1)^2$.
Како је $(ka^2-1)^2 \equiv \left(ka^2 - kab\right)^2 = k^2a^2(a-b)^2 \pmod{kab-1}$ и $(k^2a^2, kab-1) = 1$, важи $kab-1 \mid (ka^2-1)^2$ ако и само ако $kab - 1 \mid (a-b)^2$. Следи да је пар (a,b) добар ако и само ако је то и (b,a). Према томе, ако је $a \neq b$, може се претпоставити да је $b > a$.

Нека је a најмањи природан број за који постоји $b > a$, $b \in \mathbb{N}$ такав да је пар (a, b) добар. Тада је

$$\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1} \equiv -\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1}\cdot(kab-1) = -(ka^2-1)^2 \equiv -1 \pmod{ka},$$

па постоји $c \in \mathbb{N}$, тако да је $(ka^2-1)^2 = (kab-1)(kac-1)$, тј. пар (a,c) је добар. Како је $kac - 1 = \dfrac{(ka^2-1)^2}{kab-1} < ka^2 - 1$, следи $a > c$, што је контрадикција са начином избора пара (a, b).

Из добијене контрадикције следи тврђење задатка.

Задатак 6. Унија $3n$ равни $x = i$, $y = i$ и $z = i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ садржи S и не садржи $(0,0,0)$. Претпоставимо да постоји колекција $\{a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0 \mid 1 \leqslant i \leqslant N\}$ од $N < 3n$ равни која садржи S и не садржи $(0,0,0)$. Посматрајмо полином $P(x,y,z) = \prod\limits_{i=1}^{N}(a_ix + b_iy + c_iz + d_i)$.

Лема 6.1. Постоје бројеви $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ такви да је $\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i = -1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i i^m = 0$ за $0 < m < n$.

Доказ. Горњи систем је систем n линеарних једначина са n непознатих. Детерминанта система је Вандермондова детерминанта (за бројеве $1, 2, \ldots, n$), која је различита од нуле, одакле следи тврђење леме 6.1.

Из леме 6.1 (ако се усвоји да је $0^0 = 1$) следи да постоје $\delta_0 = 1, \delta_1, \ldots, \delta_n$ такви да је $\sum\limits_{i=0}^{n}\delta_i i^m = 0$ за $0 \leqslant m < n$.

Нека је $\deg P = N < 3n$ и

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\delta_i\delta_j\delta_k P(i,j,k).$$

Како је у претходној суми $\delta_0^3 \cdot P(0,0,0)$ једини члан различит од нуле, следи да је $S_1 = P(0,0,0) \neq 0$. С друге стране, ако је $P(x,y,z) = \sum\limits_{\alpha+\beta+\gamma \leqslant N} p_{\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$, следи

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \delta_i\delta_j\delta_k \sum_{\alpha+\beta+\gamma\leqslant N} p_{\alpha,\beta,\gamma} i^\alpha j^\beta k^\gamma \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma\leqslant N} p_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\sum_{i=0}^{n}\delta_i i^\alpha\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\delta_j j^\alpha\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\delta_k k^\alpha\right). \qquad (\maltese) \end{aligned}$$

Уочимо сабирак који одговара тројци (α,β,γ) у $(\maltese)$. Како је $\alpha+\beta+\gamma = N < 3n$, макар један од α,β,γ мора бити мањи од n. Ако је то α (без смањења општости), из леме 6.1 следи да је $\sum\limits_{i=0}^{n}\delta_i i^\alpha = 0$. Значи, сваки сабирак у $(\maltese)$ је нула, па следи да је $S_1 = 0$.
Из добијене контрадикције следи да је потребан број равни не мањи од $3n$, односно, на основу горњег примера, да је тражени број $3n$.

Напомена. Може се показати (без знања Вандермондове детерминанте) да бројеви $\delta_0 = 1$ и $\delta_i = (-1)^i\binom{n}{i}$ задовољавају услове. То следи из наредне леме.

Лема 6.2. За све природне $0 \leqslant m < n$ и произвољни полином P степена m важи

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{i}P(i) = 0.$$

Доказ. Индукција по n. За $n=1$ полином P је константан, па испуњава дату једнакост јер је $P(0)-P(1)=0$.

Нека је тврђење тачно за $n-1$ и нека је $P'(x) = P(x+1)-P(x)$. P' је полином и важи $\deg P' = \deg P - 1 = m-1 < n-1$, па важи

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P'(i) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\left(P(i)-P(i+1)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i) - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}P(i) \\ &= P(0) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left(\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right)P(i) + (-1)^nP(n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}P(i), \end{aligned}$$

тј. тврђење је тачно и за n.

Наравно, за прво решење није потребно знати вредности $\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_n$, међутим, лема 6.2 је овде наведена зато што искусан математичар (у овој области) на основу ове леме може одмах наслутити решење задатка.

Друго решење. Нека важи све као и у првом пасусу првог решења.

Лема 6.3. Нека је $P'(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ полином који се анулира у свим тачкама скупа

$$\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_k) \;\middle|\; x_1,x_2,\ldots,x_k \in \{0,1,\ldots,n\},\ x_1+x_2+\ldots+x_k > 0\right\}$$

и $P'(0,0,\ldots,0) \neq 0$. Тада је $\deg P' \geqslant kn$.

Доказ. Индукција по k. За $k=1$, P' је ненула полином са n нула, па је $\deg P' \geqslant n$. Нека тврђење важи за полином са $k-1$ променљивих.

Нека је $R(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ остатак при дељењу полинома $P'(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ са $Q(x_k) = x_k \cdot (x_k - 1) \cdot \ldots \cdot (x_k - n)$. Како су $0, 1, \ldots, n$ нуле полинома Q, следи да P' и R узимају исте вредности на скупу $\{0, 1, \ldots, n\}^k$, па и R задовољава услове леме 6.2. и $\deg_{x_k} R \leqslant n$. Нека је

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_k) = R_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})x_k^n + R_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})x_k^{n-1} + \ldots + R_0(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}).$$

1. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, n\}$, не сви једнаки нула. Полином $T(x_k) = R(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k)$ је степена највише n и анулира се за $x_k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, па мора бити $T \equiv 0$, одакле је $R_n(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}) = 0$.
2. Слично, $T(x_k) = R(0, 0, \ldots, x_k)$ је полином степена највише n, има n нула $(1, 2, \ldots, n)$ и важи $T(0) = R(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$, па је $\deg T = n$, одакле је $R_n \not\equiv 0$, као и $R_n(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$.

Из претходног следи да полином $R_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ задовољава индуктивну претпоставку, па је $\deg P' \geqslant \deg R \geqslant \deg R_n + n \geqslant (k-1)n + n = kn$.

Тврђење задатка следи из леме 6.3 примењене на полином P, јер је $P(0,0,0) \neq 0$ и $P(i,j,k) = 0$ за све $(i,j,k) \in S$, па је $\deg P \geqslant 3n$.

Напомена (пред треће решење). Треће решење се не разликује битно од претходних. Дато је да би назначило важност редовне информисаности у савременој математици, нарочито од распрострањивања интернета. Правило је да се за Међународну математичку олимпијаду бирају потпуно оригинални задаци. Међутим, није непознато у историји да неки задатак буде прерада старог резултата, рецимо резултата одређеног рада из научног часописа. Такав је ове године био шести задатак за који се испоставило да је просто модификација тзв. *комбинаторног нулштелензаца*, тврђења старог двадесетак година (видети, на пример, *N. Alon, **Combinatorial Nullstellensatz**, Combinatorics, Probability and Computing 8 (1999), 7-29*). Упркос једноставности примене овог тврђења, било је случајева да је такмичару познато тврђење али да ипак не уради задатак. Зато је важно нагласити да није довољно знати како гласи тврђење, већ треба проучити и његову позадину и доказе, јер они често крију идеје које су и моћније од самог тврђења, корисне и саме за себе.

Лема 6.4. (Combinatorial Nullstellensatz) Нека је $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $r_i \in \mathbb{N}_0$ за $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\deg P = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ и коефицијент уз моном $x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n}$ различит од нуле. Ако постоје скупови $T_i \subseteq \mathbb{R}$ ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), такви да је $|T_i| > r_i$ за $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, тада постоје $t_i \in T_i$ тако да је $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \neq 0$.

Доказ. Не разликује се битно од доказа леме 6.3 (технички је за нијансу компликованији) и препушта се заинтересованом читаоцу да га спроведе.

Треће решење. Нека је P дефинисан као у првом решењу. Како је $3n$ равни довољно, довољно је доказати да не може бити $N < 3n$. Ако би било тако и ако је

$$Q(x,y,z) = P(x,y,z) - a \cdot \prod_{i=1}^{n} (x-i)(y-i)(z-i),$$

како је $\deg P < 3n$ и $\deg \left(\prod_{i=1}^{n} (x-i)(y-i)(z-i) \right) = 3n$, следи да је $\deg Q = 3n$ (за $a \neq 0$). Међутим, полином Q се анулира у свим тачкама скупа S, па како је $P(0,0,0) \neq 0$, то за неко $a \neq 0$ важи $Q(0,0,0) = 0$, при чему је коефицијент уз $x^n y^n z^n$ различит од нуле. Применом леме 6.4 на полином Q (са тако изабраним a), моном $x^n y^n z^n$ и скупове $T_i = \{0, 1, \ldots, n\}$ добијамо да је $Q(i,j,k) \neq 0$ за неке $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Из добијене контрадикције следи тврђење задатка.