МЕЂУНАРОДНИ ТРЕНИНГ ЗА ММО

Râmnicu Vâlcea, 19. & 20.01.2007.

Први дан

Задатак 1. Коначно много кругова прекрива оштроугли троугао. Доказати да је збир њихових полупречника не мањи од полупречника описане кружнице тог троугла.

Задатак 2. Нека је n природан број. Одредити све полиноме $f(x)$ степена n са комплексним коефицијентима, тако да
$$f(x^2+x+1) \mid f(x^3-1).$$

Задатак 3. Нека је n природан број. Жири ММО је састављен од $15n$ чланова и комуницира на 5 језика. На ММО 2007. примећено је да сваким паром различитих језика може разговарати тачно $6n$ чланова жирија и да сваком тројком различитих језика може разговарати тачно $3n$ чланова жирија.

Доказати да свака два члана жирија могу разговарати на неком од ових језика и да постоји језик којим може разговарати бар $10n$ чланова жирија.

Други дан

Задатак 1. У троуглу ABC тачке B', C', су додирне тачке споља приписаних кружница са дужима CA, AB, редом.

Доказати да се описане кружнице троуглова ABB' и ACC' секу у тачки која се налази на симетрали $\sphericalangle CAB$ (тачки различитој од тачке A).

Задатак 2. Нека је $n \geqslant 2$ природан број и $N = n^2+n-1$. Поља матрице $N \times N$ су обојена са n боја. Доказати да постоји подматрица, димензије 2×2, чија су сва 4 поља исте боје.

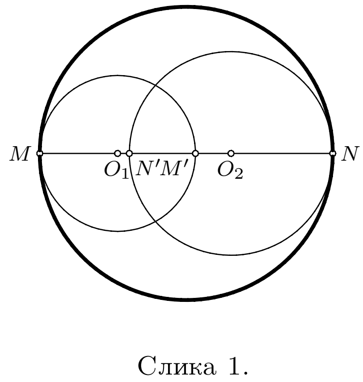
Задатак 3. Нека су a и n природни бројеви. Доказати да постоји природан број m тако да n дели $a^m - m$.

Решења:

Први дан

Задатак 1. Нека кругови, чији су полупречници $r_1, \ldots, r_n$, прекривају $\triangle ABC$. Тада они не могу бити међусобно дисјунктни, тј. бар 2 имају заједничку тачку (нека су то кругови чији су полупречници r_i и r_j). Ако је један од кругова садржан у другом, његовим изостављањем се добија прекривање круга са $n-1$ кругова, а збир полупречника се смањује.

Иначе, нека права која спаја центре ових кругова сече први круг у тачкама M и M', а други у N и N', тако да је тачка M на већем растојању од другог круга него тачка M', а тачка N на већем растојању од првог круга него тачка N' ($M' \equiv N'$ одговара случају да се уочени кругови додирују). Круг чији је пречник MN садржи оба круга (слика 1), а за његов полупречник (r') важи $r' = \dfrac{MN}{2} =$



Слика 1.

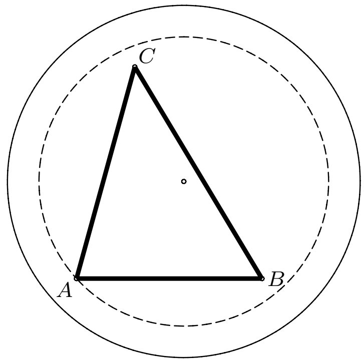
$$\frac{MN' + N'M' + M'N}{2} \leqslant \frac{MN' + 2N'M' + M'N}{2} =$$

$$\frac{(MN' + N'M') + (N'M' + M'N)}{2} = \frac{2r_i + 2r_j}{2} = r_i + r_j,$$

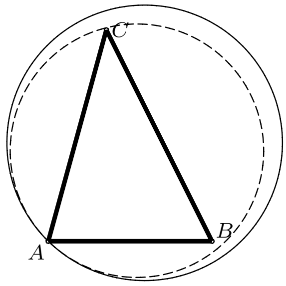
па се изостављањем уочених кругова и додавањем круга са пречником MN добија скуп од $n-1$ кругова, који прекривају троугао и чији је збир полупречника $(r_1 + \ldots + r_n) - r_i - r_j + r' \leqslant (r_1 + \ldots + r_n)$, тј. мањи него у полазној ситуацији.

За потпун доказ (индукцијом), довољно је још показати да круг који садржи оштроугли троугао (ABC) има полупречник не мањи од полупречника описане кружнице $\triangle ABC$.

Нека је $x > R$ (где је R полупречник описане кружнице троугла) полупречник кружнице $\mathcal{C}$ која садржи $\triangle ABC$. Тада $\mathcal{C}$ садржи бар једно теме троугла, иначе се хомотетијом са центром у центру $\mathcal{C}$ може добити мања кружница са истом особином (слика 2).



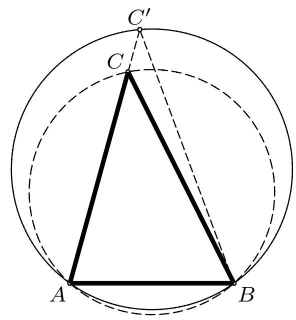
Слика 2.



Слика 3.

Слично, $\mathcal{C}$ мора садржати бар 2 темена, иначе би се (ако нпр. садржи теме A) хомотетијом са центром у A и погодно изабраним коефицијентом добила кружница мањег полупречника, која садржи $\triangle ABC$ (слика 3).

Коначно, нека је $\triangle ABC$ оштроугли и кружница са наведеним особинама садржи тачке A и B, а не садржи тачку C. Пошто тачка C припада кругу, права AC сече кружницу у тачки C', тако да је $A - C - C'$.



Слика 4.

Троугао ABC припада и том кругу (полупречника x) и описаном кругу $\triangle ABC$ (полупречника R). Како је $\sphericalangle ACB$ спољашњи у $\triangle CBC'$, важи $\frac{\pi}{2} > \sphericalangle ACB > \sphericalangle AC'B$, па је $R = \frac{AB}{\sin \sphericalangle ACB} < \frac{AB}{\sin \sphericalangle AC'B} = x$, што је контрадикција из које следи тврђење задатка.

Задатак 2. Нека је α нула полинома $f(x)$ највећег модула и нека су β_1 и β_2 решења једначине $x^2 + x + 1 = \alpha$. Тада је

$$\beta_i^3 - 1 = (\beta_i - 1)(\beta_i^2 + \beta_i + 1) = (\beta_i - 1)\alpha \tag{1}$$

за $i \in \{1, 2\}$, а из Виетових правила следи

$$\beta_1 + \beta_2 = -1. \tag{2}$$

Ако $f(x^2 + x + 1) \mid f(x^3 - 1)$, постоји $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, тако да је $f(x^3 - 1) = g(x) \cdot f(x^2 + x + 1)$ за свако $x \in \mathbb{C}$, па се заменом b_i $(i \in \{1, 2\})$, користећи (1) добија $0 = g(b_i)f(\alpha) = f((\beta_i - 1)\alpha)$, за $i \in \{1, 2\}$, па су и $(\beta_1 - 1)\alpha$ и $(\beta_2 - 1)\alpha$ нуле полинома $f(x)$. Тада је $|(\beta_1 - 1)\alpha| \leqslant |\alpha|$ и $|(\beta_2 - 1)\alpha| \leqslant |\alpha|$ (по начину избора α), па из (2) следи

$$3|\alpha| = |(-\beta_1 - \beta_2 - 2)\alpha| = |(\beta_1 - 1)\alpha + (\beta_2 - 1)\alpha| \leqslant$$

$$|(\beta_1 - 1)\alpha| + |(\beta_2 - 1)\alpha| \leqslant 2|\alpha|,$$

што је могуће само за $\alpha = 0$.

Са друге стране, јасно је да су полиноми $c \cdot x^n$ за $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ полиноми степена n који испуњавају услове задатка.

Задатак 3. Нека је a_i број чланова жирија који зна тачо i од уочених 5 језика ($i \in \{0,1,2,3,4,5\}$), а B_i број чланова жирија који зна i-ти језик ($i \in \{1,2,3,4,5\}$). Тада је

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15n. \tag{1}$$

Како особа која зна i језика зна $\binom{i}{2}$ парова језика, следи

$$\binom{2}{2} \cdot a_2 + \binom{3}{2} \cdot a_3 + \binom{4}{2} \cdot a_4 + \binom{5}{2} \cdot a_5 = \binom{5}{2} \cdot 6n \quad \text{тј.}$$

$$a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 = 60n. \tag{2}$$

Аналогно, посматрајући тројке језика, добија се

$$a_3 + 4a_4 + 10a_5 = 30n. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) добија се $(2 \cdot (1) - (2) + (3))$

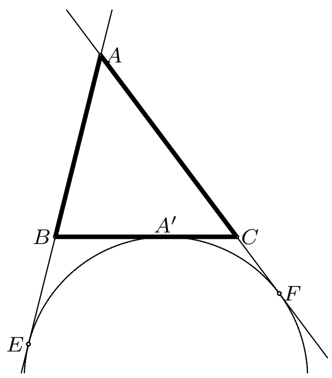
$$2a_0 + 2a_1 + a_2 + 2a_5 = 0,$$

па је $a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = a_5$ (бројеви a_i, ($i \in \{0,1,2,3,4,5\}$) су ненегативни), а затим $a_3 = 10n$, $a_4 = 5n$. Следи да сваки члан жирија прича бар три језика (од уочених 5), па било која два члана имају заједнички језик (прво тврђење задатка). Такође, $\sum\limits_{i=1}^{5} |B_i| = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 3 \cdot 10n + 4 \cdot 5n = 50n$, па је $|B_i| \geqslant \frac{50n}{5} = 10n$ за неко $i \in \{1,2,3,4,5\}$ (друго тврђење задатка).

Други дан

Задатак 1. Нека су a, b, c дужине страница BC, CA, AB, редом, троугла ABC и нека је $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Нека су E и F додирне тачке споља приписане кружнице која одговара темену A са правама AC и AB, редом. Из једнакости тангентних дужи следи да је $AE = AF$, $CE = CA'$ и $BF = BA'$, па је $2AE = AE + AF = AC + CE + BF + AB = b + CA' + A'B + c = a + b + c = 2s$, тј. $AE = AF = s$, из чега следи да је $CA' = AE - AC = s - b$ и $BA' = AF - AB = s - c$ (ово су познате релације из великог задатка и по математичким такмичењима се користе без доказа). Аналогно се добијају дужине AB', AC', BC' и CB'.



Описани кругови око $\triangle ABB'$ и $\triangle ACC'$ се секу у тачки A и још једној тачки (лукови $\widehat{BB'}$ и $\widehat{CC'}$ који не садрже тачку A спајају краке $\sphericalangle BAC$; како је $A - B' - C$ и $A - C' - B$, по непрекидности следи да се они секу). Нека је то тачка P.

Четвороугао $AC'PC$ је тетиван, па је

$$\sphericalangle PC'B = \sphericalangle ACP. \tag{1}$$

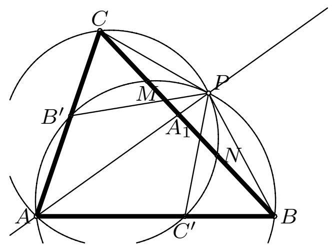
Аналогно, четвороугао $ABPB'$ је тетиван, па је

$$\sphericalangle CB'P = \sphericalangle PBC'. \tag{2}$$

Такође је

$$\sphericalangle PAB' = \sphericalangle PBB' \quad \text{и} \quad \sphericalangle PAB = \sphericalangle PB'B. \tag{3}$$

Како је $BC' = B'C = s - a$, следи да су $\triangle PC'B$ и $\triangle PB'C$ подударни, па је $PB = PB'$. Дакле, $\triangle PBB'$ је једнакокраки, па је $\sphericalangle PB'B = \sphericalangle B'BP$. Користећи (3) следи $\sphericalangle PAB' = \sphericalangle PBB' = \sphericalangle PB'B = \sphericalangle PAB$, тј. да тачка P припада симетрали $\sphericalangle BAB'$, односно $\sphericalangle BAC$, што је тврђење задатка.



Слика 6.

Друго решење. Нека је $\mathcal{I}$ инверзија са центром A у односу на круг са јединичним полупречником. Нека је $\mathcal{I}(B) = B^*$, $\mathcal{I}(B') = B'^*$, $\mathcal{I}(C) = C^*$ и $\mathcal{I}(C') = C'^*$. Тада се са овом инверзијом описана кружница $\triangle ABB'$ слика у праву $B^*B'^*$, описана кружница $\triangle ACC'$ слика у праву $C^*C'^*$, а симетрала $\sphericalangle BAC$ у саму себе, па је довољно доказати да се праве $B^*B'^*$, $C^*C'^*$ и симетрала $\sphericalangle BAC$ секу у једној тачки. У том доказу користиће се:

Лема. Нека су дужине страница QR, RP, PQ троугла PQR p, q, r, редом и нека је P_1 пресецна тачка симетрале $\sphericalangle RPQ$ и стране RQ. Тада је

$$PP_1^2 = \frac{rq}{(r+q)^2} \cdot \left((r+q)^2 - p^2\right).$$

Доказ. Како је $\dfrac{QP_1}{P_1R} = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{r}{q}$ и $p = QR = QP_1 + P_1R$, следи $QP_1 = \dfrac{r}{r+q} \cdot p$ и $P_1R = \dfrac{q}{q+r} \cdot p$, па је, на основу Стјуартове теореме, $PP_1^2 = \dfrac{QP_1}{QR} \cdot PR^2 + \dfrac{P_1R}{QR} \cdot PQ^2 - QP_1 \cdot P_1R = \dfrac{r}{r+q} \cdot q^2 + \dfrac{q}{q+r} \cdot r^2 - \dfrac{rq}{(r+q)^2} \cdot p^2 = \dfrac{rq}{(r+q)^2} \cdot \left(q(r+q) + r(r+q) - p^2\right) = \dfrac{rq}{(r+q)^2} \cdot \left((r+q)^2 - p^2\right)$.

Нека је C_1 пресек праве $C^*C'^*$ и симетрале $\sphericalangle C'^*AC^*$ (како је $C' \in AB$ и $B' \in AC$, она се поклапа са симетралом $\sphericalangle BAC$, и то и у смислу поклапања полуправих). Дакле, C_1 се налази на полуправој AA_1 (где је A_1 пресек симетрале $\sphericalangle BAC$ и BC), на растојању AC_1, које се може израчунати на основу претходно доказане леме.

Улогу тачака P, Q и R играју A, C^* и C'^*, редом. Дужине страница су $|AC'^*| = \dfrac{1}{|AC'|} = \dfrac{2}{a+c-b}$, $|AC^*| = \dfrac{1}{AC} = \dfrac{1}{b}$, па је из горње леме

$$|AC_1|^2 = \frac{|AC^*| \cdot |AC'^*|}{(|AC^*| + |AC'^*|)^2} \cdot \left((|AC^*| + |AC'^*|)^2 - |C^*C'^*|^2\right). \tag{1}$$

Из косинусне теореме следи

$$|C^*C'^*|^2 = |AC^*|^2 + |AC'^*|^2 - 2|AC^*| \cdot |AC'^*| \cdot \cos\sphericalangle BAC, \tag{2}$$

па како је $\cos\sphericalangle BAC = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, из (1) и (2) следи

$$|AC_1|^2 = \frac{\dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{2}{a+c-b}}{\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{a+c-b}\right)^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{2}{a+b-c} \cdot \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\right) =$$

$$\frac{8 \cdot \left(\dfrac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}\right)}{(a+c-b+2b)^2} = \frac{4 \cdot \left((b+c)^2 - a^2\right)}{bc(a+b+c)^2}.$$

Нека је B_1 пресек праве $B^*B'^*$ и симетрале $\sphericalangle BAC$. Аналогно се добија да је $|AB_1|^2 = \dfrac{4\left((b+c)^2 - a^2\right)}{bc(a+b+c)^2} = |AC_1|^2$ (добијени израз је симетричан по b и c), одакле је $B_1 \equiv C_1$, па следи тврђење задатка.

Треће решење. Нека описана кружница $\triangle ABB'$ (k_B) сече BC у M (сем у B), а описана кружница $\triangle ACC'$ (k_C) сече BC у N (сем у C) (ознаке као на слици 6). Из потенције тачке C у односу на k_B следи $|CM|\cdot|CB| = |CB'|\cdot|CA|$, тј.

$$|CM| = \frac{|CA|}{|CB|}\cdot|CB'|, \tag{1}$$

а из потенције тачке B у односу на k_C следи $|BN|\cdot|BC| = |BC'|\cdot|BA|$, тј.

$$|BN| = \frac{|BA|}{|BC|}\cdot|BC'|. \tag{2}$$

За тврђење задатка је довољно показати да тачка пресека стране AB и симетарле $\sphericalangle BAC$ (A_1) припада радикалној оси кружница описаних око $\triangle ABB'$ и $\triangle ACC'$, тј. да је $\overrightarrow{A_1N}\cdot\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{A_1B} \Leftrightarrow$

$$\left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BA_1}\right)\cdot\overrightarrow{A_1C} = \left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA_1}\right)\cdot\overrightarrow{A_1B} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{A_1B}$$

(јер је $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}$), а како је $B-A_1-C$, $B-M-C$ и $B-N-C$, последње је еквивалентно са $|BN|\cdot|A_1C| = |CM|\cdot|A_1B|$.

Међутим, из (1), (2) и $\dfrac{|A_1C|}{|A_1B|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$ (однос у ком симетрала угла дели наспрамну страницу) следи

$$|BN|\cdot|A_1C| = |CM|\cdot|A_1B| \Leftrightarrow \frac{|A_1C|}{|A_1B|}\cdot\frac{|BN|}{|CM|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|AC|}{|AB|}\cdot\frac{\frac{|BA|}{|BC|}\cdot|BC'|}{\frac{|CA|}{|CB|}\cdot|CB'|} = 1 \Leftrightarrow$$

$|BC'| = |CB'|$, што је тачно ($|BC'| = |CB'| = s-a$, видети коментар на почетку првог решења овог задатка).

Напомена. Векторски рачун у трећем решењу је коришћен само да би се избегло разматрање случајева у зависности од међусобног положаја тачака M, A_1 и N, тј. у зависности од тога да ли је тачка P унутар $\triangle ABC$, на BC или ван $\triangle ABC$ (може се показати да се претходно дешава када је $2\cdot|BC| < |AC|+|AB|$, $2\cdot|BC| = |AC|+|AB|$, односно $2\cdot|BC| > |AC|+|AB|$, редом).

Задатак 2. Уочена матрица има N^2 поља која су обојена са n боја, па је неком бојом обојено бар $k := \left[\dfrac{N^2+n-1}{n}\right] = n^3+2n^2-n-1$ поља.

Докажимо да постоји подматрица димензија 2×2 чија су поља обојена овом бојом. Пар колона дате матрице се може изабрати на $\dbinom{N}{2}$ начина. Нека је $a_i \geqslant 0$ (за $1 \leqslant n$) број поља у i-тој врсти која су обојена уоченом бојом. Тада је $a_1+\ldots+a_N \geqslant k$, а парова поља ове боје у i-тој колони има $\dbinom{a_i}{2}$.

Нека не постоји подматрица димензија 2×2 чија су поља обојена уоченом бојом. Тада је

$$\binom{a_1}{2}+\ldots+\binom{a_n}{2} \leqslant \binom{N}{2}. \tag{1}$$

Како је функција $\dbinom{x}{2}$ конвексна, из Јенсенове неједнакости следи

$$\frac{\binom{a_1}{2}+\ldots+\binom{a_n}{2}}{N} \geqslant \begin{pmatrix}\frac{a_1+\ldots+a_N}{N} \\ 2\end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix}\frac{k}{N} \\ 2\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) се добија $N\cdot\begin{pmatrix}\frac{k}{N} \\ 2\end{pmatrix} \leqslant \dbinom{N}{2}$, што је, сређивањем, еквивалентно са $\begin{pmatrix}\frac{k}{N} \\ 2\end{pmatrix} \leqslant \dfrac{N-1}{2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{k}{N}\left(\dfrac{k}{N}-1\right) \leqslant N-1 \Leftrightarrow$

$$k(k-N) \leqslant N^2(N-1) \Leftrightarrow$$

$$(n^3+2n^2-n-1)\left((n^3+2n^2-n-1)-(n^2+n-1)\right) \leqslant (n^2+n-1)^2(n^2+n-2) \Leftrightarrow$$
$$(n^3+2n^2-n-1)(n^3+n^2-2n) \leqslant (n^2+n-1)^2(n^2+n-2) \Leftrightarrow$$

(јер је $n^2+n-2=(n-1)(n+2)>0$ за $n \geqslant 2$)

$$n^4+2n^3-n^2-n \leqslant n^4+2n^3-n^2-2n+1 \Leftrightarrow n \leqslant 1,$$

што је контрадикција из које следи тврђење задатка.

Задатак 3. Ако је $a=1$ може се узети $m=kn+1$ за $n \geqslant 1$ $(1^m-m=1^{kn+1}-(kn+1)=-kn)$.

Ако је $a \geqslant 2$ докажимо индукцијом по n да за сваки пар (a,n) постоји бесконачно много бројева који испуњавају услове задатка. Ако је $n=1$ оно је очигледно.

Нека је $n>1$ и нека је тврђење тачно за све бројеве мање од n. Нека је $a=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\cdot q_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot q_l^{\beta_l}$ и $n=p_1^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\gamma_k}\cdot r_1^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot r_s^{\delta_s}$, где су (p_i), (q_i) и (r_i) прости бројеви такви да је $q_i \neq r_j$ за свако i,j, а (α_i), (β_i), (γ_i) и (δ_i) природни бројеви. Нека је $b=p_1^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\gamma_k}$ и $c=r_1^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot r_s^{\delta_s}$ (тада је $n=bc$ и $(a,c)=1$).

Ако је $c=1$, за $m=kn$ и довољно велико k важи $n \mid a^m-m$ (сви прости делиоци n учествују у факторизацији броја a).

Ако је $c \neq 1$ важи $1 \leqslant \varphi(c) < c$, па по индуктивној претпоставци постоји бесконачно много t тако да $\varphi(c) \mid a^t-t$. Следи да $c \mid a^{a^t-t}-1$. Као у ситуацији $c=1$, за довољно велико t важи $b \mid a^t$, па $n=bc \mid a^t\left(a^{a^t-t}-1\right)=a^{a^t}-a^t$ за довољно велико t.