28. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna varijanta, 22. oktobar 2006. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Na tabli su napisana u rastućem poretku dva prirodna broja x i y, ($x \leq y$). Peđa zapisuje u svesku x^2 (kvadrat prvog broja), a zatim na tabli zamenjuje mesta brojevima x i $y-x$, pišući ih u rastućem poretku. Sa novim brojevima na tabli Peđa ponavlja tu operaciju, itd. sve dotle dok jedan od brojeva na tabli ne postane nula. Čemu će u tom momentu biti jednak zbir brojeva u Peđinoj svesci?

2. Zna se da lažovi uvek lažu, istinoljubci uvek govore istinu, a prevrtljivci nekad lažu, a nekad govore istinu. Vi možete postavljati pitanja na koja se odgovara sa “da” ili “ne”. (Na primer:”Da li je istina da je ovaj čovek prevrtljivac?”)

(1 poen) **a)** Pred vama su trojica – lažov, istinoljubac i prevrtljivac, koji znaju ko je ko među njima. Kako vi to možete saznati?

(3 poena) **b)** Pred vama su četvorica – lažov, istinoljubac i dva prevrtljivca i sva četvorica znaju ko je ko među njima. Dokažite da se prevrtljivci mogu dogovoriti da odgovaraju tako da vi, postavljajući pitanja toj četvorici, ni za koga od njih ne možete sa sigurnošću utvrditi ko je ko.

3. (2 poena) **a)** Napisano je 2007 prirodnih brojeva većih od 1. Dokažite da se može precrtati jedan broj, tako da se proizvod ostalih brojeva može predstaviti u vidu razlike kvadrata dva prirodna broja.

(2 poena) **b)** Napisano je 2007 prirodnih brojeva većih od 1, među kojima je jedan jednak 2006. Pokazalo se da među napisanim brojevima postoji samo jedan broj, tako da se proizvod ostalih brojeva može predstaviti u vidu razlike kvadrata dva prirodna broja. Dokažite da je taj broj 2006.

4. (4 poena) Na produžetku stranice BC trougla ABC preko temena B označena je duž BB′ jednaka stranici AB. Simetrale spoljašnjih uglova kod temena B i C seku se u tački M. Dokažite da tačke A, B′, M i C pripadaju istoj kružnici.

5. (4 poena) Koji je najveći broj nekonveksnih podudarnih mnogouglova na koje se može razrezati kvadrat, tako da sve stranice mnogouglova budu paralelne stranicama kvadrata i da se ni koja dva od tih mnogouglova ne mogu dobiti jedan iz drugog paralelnim pomeranjem (translacijom)? /Paralelno pomeranje – pomak bez obrtanja/

28. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna varijanta, 22. oktobar 2006. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Na tabli su napisana tri prirodna broja *x, y, z.* Peđa zapisuje u svesku proizvod bilo koja dva od njih, a na tabli umanjuje treći broj za 1. Sa nova tri broja na tabli Peđa ponavlja istu operaciju, itd. sve dotle dok jedan od brojeva na tabli ne postane nula. Čemu će u tom momentu biti jednak zbir brojeva u Peđinoj svesci?

2. (4 poena) Dat je tangentni četvorougao. Dodirne tačke četvorougla i kružnice oko koje je opisan spojene su redom dužima. U tako nastale trouglove upisane su kružnice. Dokažite da su dijagonale četvorougla čija su temena centri tih kružnica uzajamno normalne.

3. (4 poena) Tablica 2006×2006 popunjena je brojevima 1, 2, 3, … 2006^2. Dokažite da se u takvoj tablici mogu naći dva broja u poljima sa zajedničkom stranicom ili temenom, takva da je njihov zbir deljiv sa 4.

4. (4 poena) Date su dve beskonačne (na jednu stranu) progresije: aritmetička a_1, a_2, a_3, … i geometrijska b_1, b_2, b_3, …, pri čemu svi brojevi koji se nalaze među članovima geometrijske progresije takođe se nalaze i među članovima aritmetičke progresije. Dokažite da je količnik geometrijske progresije (*lj*) ceo broj.

5. (5 poena) Može li se upisati pravilni oktaedar u kocku tako da se temena oktaedra nalaze na ivicama kocke? (Pravilni oktaedar ima 6 temena, iz svakog njegovog temena polaze 4 ivice, a sve njegove strane su jednakostranični trouglovi.)

28. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Osnovna varijanta, 29. oktobar 2006. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Oko pravilnog 7-ugla opisna je kružnica i u njega je upisana kružnica. Isto je urađeno i sa pravilnim 17 – uglom. Svaki od mnogouglova se posle toga našao u svom kružnom prstenu. Pokazalo se da su površine tih prstenova jednake. Dokažite da su stranice tih mnogouglova jednake.

2. (5 poena) Došavši u novu kompaniju Čičikov je želeo da sazna ko se s kim poznaje. Da bi sve zapamtio, on je crtao kružnicu i svakog člana prikazivao pomoću tetiva (duži), pri čemu se duži onih koji se poznaju seku, a onih koji se ne poznaju ne seku. Čičikov je uveren da takva kolekcija tetiva postoji za ma koju kompaniju. Da li je on u pravu? (Poklapanje krajeva tetiva smatra se njihovim presekom).

3. U kvadratu 3×3 raspoređeni su brojevi: *a, b, c* u prvoj vrsti; *d, e, f* u drugoj; *g, h, i* u trećoj (tim redom).

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

Zna se da je kvadrat magičan: zbirovi brojeva u svakoj vrsti, svakoj koloni i na svakoj dijagonali su jednaki. Dokažite da je:

(3 poena) **a)** $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$

(3 poena) **b)** $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$

4. (6 poena) U oštrougli trougao upisana je kružnica poluprečnika R. Onda su povučene tri tangente te kružnice, koje dele trougao na tri pravougla trougla i šestougao. Obim šestougla iznosi LJ. Odredite zbir prečnika kružnica upisanih u nastale pravougle trouglove.

5. Omotnicom (omotom) ravne slike dimenzija 1×1 zvaćemo pravougaoni list papira površine 2, kojim možemo, ne razrezujući ga, sasvim uviti (zamotati) sliku sa obe strane. Jasno je da su omotnice pravougaonik 2×1 i kvadrat stranice $\sqrt{2}$.

(4 poena) **a)** Dokažite da postoje i druge omotnice.

(3 poena) **b)** Dokažite da ima beskonačno mnogo omotnica.

6. (8 poena) Neka je $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$, gde je $\frac{a_n}{b_n}$ neskrativ razlomak. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva *n*, za koje je iapunjena nejednakost $b_{n+1} < b_n$.

7. (9 poena) Voditelj kviza ima špil od 52 karte. Gledaoci žele da saznaju u kom poretku su složene karte (ne precizirajući pri tome – da li odozgo nadole ili odozdo nagore). Dopušteno je voditelju postavljati pitanja oblika: "Koliko se karata nalazi između te i te karte?" Jedan od gledalaca je krišom video kojim redom su složene karte. Koliko najmanje pitanja on mora postaviti, da bi ostali gledaoci, prema odgovorima na ta pitanja, mogli saznati redosled karata u špilu" ?

28. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Osnovna varijanta, 29. oktobar 2006. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (5 poena) Došavši u novu kompaniju Čičikov je želeo da sazna ko se s kim poznaje. Da bi sve zapamtio, on je crtao kružnice i svakog člana prikazivao pomoću tetiva (duži), pri čemu se duži onih koji se poznaju seku, a onih koji se ne poznaju ne seku. Čičikov je uveren da takva kolekcija tetiva postoji za ma koju kompaniju. Da li je on u pravu? (Poklapanje krajeva tetiva smatra se njihovim presekom).

2. (6 poena) Na stranicama BC, AC i AB oštrouglog trougla ABC uzete su redom tačke A_1, B_1 i C_1 tako da su poluprave A_1A, B_1B i C_1C bisektrise uglova trougla $A_1B_1C_1$. Dokažite da su duži AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla ABC.

3. (6 poena) U broju a = 0,12457… n-ta cifra posle zapete jednaka je cifri levo od zapete u broju $n\sqrt{2}$. Dokažite da je a iracionalan broj.

4. (6 poena) Može li se neka prizma razdeliti na piramide (koje nemaju zajedničkih delova) tako da osnova svake od piramida leži u jednoj od osnova (baza) prizme, a naspramno teme (vrh) pripada drugoj osnovi prizme?

5. (7 poena) Neka je $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$, gde je $\frac{a_n}{b_n}$ neskrativ razlomak. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n, za koje je ispunjena nejednakost $b_{n+1}<b_n$.

6. Reći ćemo da je špil karata složen pravilno ako se ma koji par uzastopnih karata slaže po boji ili po vrednosti, što je takođe tačno za kartu na vrhu i kartu na dnu špila i na vrhu je “kec”(as) pik. Dokažite da je broj načina da se pravilnio složi špil karata:

(3 poena) **a)** deqiv sa 12! ,
(5 poena) **b)** deqiv sa 13! .

7. Pozitivni brojevi $x_1,\ldots,x_k$ zadovoqavaju nejednakosti

$$x_1^2+\ldots+x_k^2<\frac{x_1+\ldots+x_k}{2} \quad \text{i} \quad x_1+\ldots+x_k<\frac{x_1^3+\ldots+x_k^3}{2}$$

(3 poena) **a)** Dokažite da je $k > 50$.
(3 poena) **b)** Nađite primer takvih brojeva za neko k.
(3 poena) **v)** Odredite najmanje k za koje je primer moguć.