25. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Охрид, Македонија – 6. мај 2008.

1. Дат је разностранични оштроугли троугао ABC у коме је $AC > BC$. Нека је O центар описаног круга и H ортоцентар троугла ABC, и нека је F подножје висине из темена C. Тачка P (различита од A) је одабрана на правој AB тако да је $AF = PF$, а M је средиште дужи AC. Нека је X пресек правих PH и BC, Y пресек правих OM и FX, и Z пресек правих OF и AC. Доказати да тачке F, M, Y и Z леже на истом кругу. *(Кипар)*

2. Да ли постоји низ $a_1, a_2, \ldots$ позитивних бројева који задовољава следећа два услова:

(i) $\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant n^2$ за сваки природан број n;

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant 2008$ за сваки природан број n? *(Бугарска)*

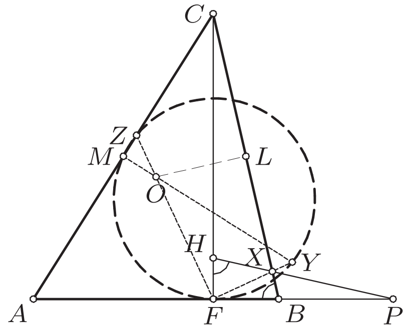
3. Нека је n природан број. Правоугаоник са страницама $90n+1$ и $90n+5$ подељен је на јединичне квадрате са страницама паралелним страницама правоугаоника. Нека је S скуп свих темена ових јединичних квадрата. Доказати да је број правих које садрже бар две тачке из S дељив са 4. *(Бугарска)*

4. Нека је c природан број. Низ $a_1, a_2, \ldots$ је дефинисан са $a_1 = c$ и $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3$ за сваки природан број n. Одредити све вредности c за које постоје цели бројеви $k \geqslant 1$ и $m \geqslant 2$ такви да је број $a_k^2 + c^3$ једнак m-том степену неког природног броја. *(Бугарска)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Како је $\sphericalangle ZMY = 90^\circ$, довољно је доказати да је $\sphericalangle ZFY = \sphericalangle OFX = 90^\circ$. Нека је X' тачка на страници BC таква да је $\sphericalangle OFX' = 90^\circ$, и нека је L средиште странице BC. Тачке F и L су на кругу k над пречником OX', а такође обе леже на Ојлеровом кругу ω троугла ABC чији је центар K средиште дужи OH. Зато је FL, као заједничка тетива кругова ω и k, нормално на JK, где је J средиште OX'. Из $JK \parallel HX'$ следи $FL \perp HX'$; одавде је $\sphericalangle FHX' = 90^\circ - \sphericalangle CFL = 90^\circ - \sphericalangle FCL = \sphericalangle ABC = \sphericalangle AHF = \sphericalangle FHX$, па је $X' \equiv X$.



2. Претпоставимо да такав низ постоји. По Коши-Шварцовој неједнакости имамо

$$\frac{1}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{2n}} \geqslant \frac{n^2}{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}} \geqslant \frac{n^2}{a_1 + \cdots + a_{2n}} \geqslant \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Међутим, одавде следи да је $\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{k}{4}$ за $k = 1, 2, \ldots$, што је у супротности са условом (ii).

3. Поставимо координатни систем са координатним почетком у центру правоугаоника O, са осом x паралелној дужој страници правоугаоника. Скуп $\mathcal{P}$ посматраних правих делимо у две групе.

1° Праве које не пролазе кроз O. Има $(90n+2)+(90n+6)$ правих паралелних једној од оса, што је дељиво са 4. За сваку од осталих правих кроз O, праве симетричне њој у односу на осе и тачку O такође припадају скупу $\mathcal{P}$, па се скуп оваквих правих састоји од дисјунктних четворки. Дакле, број правих типа 1° дељив је са 4.

2° Праве кроз O. Свака права кроз O која садржи неку тачку из S садржи и њој симетричну тачку, и самим тим лежи у $\mathcal{P}$, а њен нагиб је рационалан број $\frac{p}{q}$, где су p и q непарни цели бројеви са $|p| \leqslant 90n+1$, $0 < q \leqslant 90n+5$ и $(p,q)=1$. Праве типа 2° делимо у три подгрупе.

$2^\circ 0.$ Две праве $l_1(x=y)$ и $l_2(x=-y)$.

$2^\circ 1.$ За сваку праву кроз O са нагибом $\frac{p}{q}$ за $|p| \leqslant 90n+1$, различиту од l_1 и l_2, праве симетричне њој у односу на праве x, l_1 и l_2 све припадају скупу $\mathcal{P}$. Дакле, и овакве праве се деле на дисјунктне четворке.

2°2. Остају праве кроз O са нагибом $\frac{p}{q}$ у коме је $q \in \{90n+3, 90n+5\}$. Непарних природних бројева не већих од q и узајамно простих са q има исто онолико колико има парних, тј. $\frac{1}{2}\varphi(q)$ (јер $(x,q) = 1 \wedge 2 \nmid x \Leftrightarrow (q-x,q) = 1 \wedge 2 \mid q-x$). Следи да за $q = 90n+3$ оваквих правих има $\varphi(90n+3)$, док их за $q = 90n+5$ има $\varphi(90n+5) - 2$ јер треба искључити праве с нагибом $\pm\frac{90n+3}{90n+5}$. Како $4 \mid \varphi(90n+3) = \varphi(3)\varphi(30n+1)$ и $4 = \varphi(5) \mid \varphi(90n+5)$, укупан број овак- вих правих је облика $4k-2$.

Дакле, укупан број правих типа 2° је такође дељив са 4.

4. За $k > 1$ из рекурентне везе добијамо

$$a_k^2 + c^3 = a_{k+1} - a_k = a_k^2 + a_k - a_{k-1}^2 - a_{k-1}^2 = (a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1} + 1). \qquad (*)$$

Претпоставимо да $d \mid a_k - a_{k-1}$ и $d \mid a_k + a_{k-1} + 1$. Тада $d \mid 2a_k + 1$ и $d \mid 2a_{k-1} + 1$. Како је из рекурентне релације $2(2a_n+1) = (2a_{n-1}+1)^2 + 4c^3 + 1$, следи да $d \mid 4c^3+1$, а одатле даље следи да $d \mid 2a_n + 1$ за све $n < k$. Дакле, $d \mid 2a_1 + 1 = 2c + 1$. Међутим, тада $d \mid 2(4c^3+1) - (2c+1)(4c^2 - 2c + 1) = 1$, тј. $d = 1$.

Сада, ако је $a_{k+1} - a_k$ m-ти степен, из $(*)$ следи да је и $a_k - a_{k-1}$ потпун степен. Настављајући овај поступак закључујемо да је $a_2 - a_1 = c^2(c+1)$ m-ти степен, па из $(c^2, c+1) = 1$ следи да су то и c^2 и $c+1$. Међутим, c не може бити m-ти степен, па m мора бити парно (шта више, $m = 2$), тј. $c+1$ је потпун квадрат.

С друге стране, ако је $c+1$ квадрат, то је и $a_1^2 + c^3 = c^2(c+1)$.