

Romanian Master in Mathematics

First Edition, 2008

Задатак 1. Нека је ABC једнакостранични троугао. Нека је P променљива тачка у унутрашњости троугла, чија су растојања од страница троугла a^2 , b^2 и c^2 , где су a, b и c позитивни реални бројеви. Одредити геометријско место тачака P , таквих да a, b и c могу бити странице недегенерисаног троугла.

Задатак 2. Доказати да се произвољна бијекција $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ може представити у облику $f = u + v$, где су $u, v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ бијекције.

Задатак 3. Нека је $a > 1$ природан број. Доказати да за сваки природан број N у низу

$$(a_n)_{n \geq 1}, \quad a_n = \left[\frac{a^n}{n} \right],$$

постоји број дељив са N .

Задатак 4. Доказати да се међу произвољних $(n+1)^2$ тачака које припадају квадрату чија је страница дужине n ($n \in \mathbb{N}$) могу изабрати три, тако да троугао (могуће дегенерисан) одређен њима има површину не већу од $\frac{1}{2}$.

Сваки задатак вреди 7 поена.

Време за рад је 5 часова.