29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 21. октобар 2007. год.

8—9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) Колико се највише белих и црних жетона може ставити на шаховску таблу тако да на свакој хоризонтали и на свакој вертикали белих жетона буде тачно два пута више него црних? (Један жетон заузима само једно поље)

2. (4 поена) На папиру су записани број 1 и неки број x који није цео. У једном потезу (кораку) може се на папиру написати збир или разлика било која два већ написана броја, или да се напише број реципрочан било ком од већ написаних бројева. Такође је допуштено на папиру записати број који се тамо већ налази, као и сабрати број сам са собом. Може ли се после извесног броја потеза на папиру појавити број x^2?

3. (4 поена) Средиште једне од страница троугла и подножја висина спуштених на друге две странице тог троугла су темена једнакостраничног троугла. Мора ли у том случају и полазни троугао бити једнакостраничан?

4. (5 поена) У таблицу 29×29 уписани су бројеви 1, 2, 3, ... , 29, сваки тачно по 29 пута. Испоставило се да је збир бројева изнад главне дијагонале три пута већи од збира бројева испод те дијагонале. Нађите број који је уписан у централно поље те таблице. (Главна дијагонала — то је дијагонала која спаја горњи леви угао таблице са доњим десним углом)

5. (5 поена) Мађионичар завезаних очију даје једном гледаоцу 5 карата с бројевима од 1 до 5. Гледалац две карте задржава (сакрива) код себе, а три даје мађионичаревом помоћнику. Помоћник показује гледаоцу две од те три карте, а гледалац каже мађионичару бројеве тих карата (којим год хоће редом). После тога мађионичар погађа бројеве карата које је задржао (сакртио) гледалац. Како треба да се договоре мађионичар и помоћник, да би трик увек успео?

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 21. октобар 2007. год.

10—11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена. Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) На свакој од сто слика приказани су једна одрасла особа и једно дете које је нижег раста од одрасле особе. Од свих њих треба саставити једну велику слику. При томе је допуштено променити размеру сваке слике, тј. поделити висину одраслог и висину детета истим целим бројем (при чему се за разне слике размера може мењати различито). Доказати да је могуће урадити (тј. променити размеру сваке слике) тако да после тога на великој (збирној) слици ма која одрасла особа (с било које слике) буде виш аод ма ког детета (на било којој од слика).

2. (4 поена) На папиру су записана три позитивна броја: x, y и 1. У једном потезу (кораку) може се на папиру написати збир или разлика било која два већ написана броја или, пак, број реципрочан било ком од већ написаних бројева. Такође је допуштено на папиру записати број који се тамо већ налази, као и сабрати број сам са собом. Може ли се после извесног броја потеза на папиру добити:

а) број x^2? (2 поена)

б) број xy? (2 поена)

Разуме се, могу се разматрати разни случајеви (на пример, ако је x=1, задатак је решен; али је остало да се реши када је x≠1, итд.).

3. (4 поена) Дата је права и две тчке A и B, које су са исте стране те праве и на једнаком растојању од ње. Како помоћу шестара и лењира наћи на правој тачку C, такву да производ AC·BC буде најмањи?

4. (4 поена) Мађионичар завезаних очију даје једном гледаоцу 29 карата с бројевима од 1 до 29. Гледалац две карте задржава (сакрива) код себе, а остале даје мађионичаревом помоћнику. Помоћник показује гледаоцу две од тих карата, а гледалац каже мађионичару бројеве тих карата (у ком год хоће редоследу). После тога мађионичар погађа бројеве карата које је задржао (сакрио) гледалац. Како треба да се договоре мађионичар и помоћник, да би трик увек успео?

5. Квадрат странице 1 cm разрезан је на три конвексна многоугла. Може ли се десити да дијаметар (пречник) свакога од њих није већи од:

а) 1 cm; (1 поен)

б) 1,01 cm; (2 поена)

в) 1,001 cm? (2 поена)

(Дијаметар многоугла је максимално растојање између два његова темена)

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 28. октобар 2007. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (5 поена) На страници CD ромба $ABCD$ узета је тачка K тако да је $AD=BK$. Нека је F пресечна тачка дијагонале BD и симетрале странице BC. Докажите да тачке A, F и K леже на једној правој.

2. **а)** (3 поена) Пера и Васа замислили су по три природна броја. Пера је за свака два од својих бројева написао на табли њихов највећи заједнички делилац. Васа је за свака два од својих бројева на табли написао њихов најмањи заједнички садржалац. Испоставило се да да је Пера на табли написао исте бројеве као и Васа (могуће другим редом). Докажите да су сви написани бројеви на табли различити.

б) (3 поена) Да ли ће тврђење из претходног задатка остати да важи ако Пера и Васа у почетку замисле по четири природна броја?

3. (6 поена) Миша стоји у центру кружног терена (ливадице) полупречника 100 метара. Сваког минута он чини корак дугачак 1 метар. Пре сваког корака он саопштава у ком смеру ће да коракне. Каћа има право да га натера да промени смер у супротан. Може ли миша поступати тако да у неком моменту свакако изађе са тог терена, или га Каћа може увек у томе спречити?

4. (7 поена) Дата је трака са $1 \times N$ поља (квадратића). Двојица играју овакву игру. Играч који је први на потезу ставља крстић у једно од слободних поља, а други играч ставља нулу. И тако наизменично. Није допуштено у суседна поља ставити два крстиће или две нуле. Губи онај ко не може да учини потез (да стави свој знак). Који од играча може увек да победи (ма како да игра његов супарник)?

5. (8 поена) Имамо колекцију (гарнитуру) од неколико тегова и на сваком је назначена његова маса. Познато је да су колекција маса и колекција натписа исте, али је могуће да су неки натписи побркани (погрешно стављени). Теразије представља хоризонтална дуж (полуга), која има ослонац у свом средишту. При мерењу тегови се вешају у произвољним тачкама полуге, после чега теразије остају у равнотежи или скрећу на једну или другу страну (тј. нарушава се равнотежа: један крај полуге се подиже, а други спушта). Може ли се увек једним мерењем проверити да ли су сви натписи тачни или не? (Теразије ће бити у равнотежи ако је збир момената тегова који су десно од средине полуге једнак збиру момената тегова који су лево, а у противном, скренуће надоле тамо где је збир момената већи. Моменат тега је производ ms масе тега m и растојања s од њега до средиишта полуге).

6. Мађионичару су везали очи, а гледалац је поређао у низ N једнаких новчића, при чему је сам одлучивао да ли ће са горње стране бити "круна" или "писмо". Мађионичарев помоћник је онда замолио гледаоца да на листу папира напише ма који број од 1 до N и покаже га свим присутним. Видевши тај број, помоћник показује гледаоцу на један од новчића у низу и моли га да преврне тај новчић, што овај учини.. Затим мађионичару одвезују очи, а он погледа на низ новчића и без грешке одређује број који је гледалац написао.

а) (4 поена) Докажите да, ако мађионичар и његов помоћник имају метод који омогућава мађионичару да гарантовано открије број за $N=a$, онда они имају метод и за $N=2a$.

б) (5 поена) Нађите све вредности N за које мађионичар с помоћником има такав метод (начин за погађање).

7. (9 поена) Влада је решио да постане велики писац. Ради тога је он сваком слову нашег језика придружио реч која садржи то слово. Затим је написао реч придружену слову "А". Даље је уместо сваког слова написао придружену му реч (правећи размак између речи); затим је у тако насталом тексту поново уместо сваког слова написао придружену му реч, и тако укупно 40 пута. Владин текст почиње овако: "Конвој бродова на успаваним морима". Докажите да се тај склоп речи среће у Владином тексту бар још једном.

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 28. октобар 2007. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.
Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. **а)** (2 поена) Пера и Васа замислили су по три природна броја. Пера је за свака два од својих бројева написао на табли њихов највећи заједнички делилац. Васа је за свака два од својих бројева на табли написао њихов најмањи заједнички садржалац. Испоставило се да је Пера на табли написао исте бројеве као и Васа (могуће другим редом). Докажите да су сви написани бројеви на табли различити.

б) (2 поена) Да ли ће тврђење из претходног задатка остати да важи ако Пера и Васа у почетку замисле по четири природна броја?

2. (6 поена) Дијагонале тетивног четвороугла (тј. четвороугла уписаног у кружницу) секу се у тачки P. Нека су K, L. M, N - средишта страница тог четвоироугла. Докажите да су полупречници описаних кружница око троуглова PKL, PLM, PMN и PNK једнаки.

3. (6 поена) Одредите све растуће аритметичке прогресије с коначним бројем чланова, чији је збир једнак 1, а сваки члан је облика $1/k$, где је k природан број.

4. (6 поена) Имамо колекцију (гарнитуру) од неколико тегова и на сваком је назначена његова маса. Познато је да су колекција маса и колекција натписа исте, али је могуће да су неки натписи побркани (погрешно стављени). Теразије представља хоризонтална дуж (полуга), која има ослонац у свом средишту. При мерењу тегови се вешају у произвољним тачкама полуге, после чега теразије остају у равнотежи или скрећу на једну или другу страну (тј. нарушава се равнотежа: један крај полуге се подиже, а други спушта). Да ли је увек могуће једним мерењем проверити да ли су сви натписи тачни или не? (Теразије ће бити у равнотежи ако је збир момената тегова који су десно од средине полуге једнак збиру момената тегова који су лево, а у противном, скренуће надоле тамо где је збир момената већи. Моменат тега је производ ms масе тега m и растојања s од њега до средишта полуге).

5. Мађионичару су везали очи, а гледалац је поређао у низ N једнаких новчића, при чему је сам одлучивао да ли ће са горње стране бити "круна" или "писмо". Мађионичарев помоћник је онда замолио гледаоца да на листу папира напише ма који број од 1 до N и покаже га свим присутним. Видевши тај број, помоћник показује гледаоцу на један од новчића у низу и моли га да преврне тај новчић, што овај учини. Затим мађионичару одвезују очи, а он погледа на низ новчића и без грешке одређује број који је гледалац написао.

а) (4 поена) Докажите да, ако мађионичар и његов помоћник имају метод који омогућава мађионичару да гарантовано открије број за $N=a$ и за $N=b$, онда они имају метод и за $N=ab$.

б) (4 поена) Нађите све вредности N, за које мађионичар с помоћником има такав метод (начин за погађање).

6. (8 поена) У равни су нацртана два конвексна многоугла P и Q. За сваку страницу многоугла P, многоугао Q можемо поставити између две праве паралелне тој страници. Означимо са h најмање растојање које може бити између тих правих, а са l дужину странице, па израчунамо производ $l\,h$. Сумирајући те производе по свим страницама многоугла P, добићемо неку величину (P,Q). Докажите да је $(P,Q)=(Q,P)$.

7. Пред Аљошом се налази 100 затворених кутија, а у свакој од њих је или црвена или плава коцкица. Аљоша има рубље (руска новчана јединица, 1 рубља – 100 копејки). Он прилази ма којој затвореној кутији, објављује боју коцкице у њој (по његовом мишљењу) и ставља неку суму (то не мора бити цео број копејки, али не може бити више од суме коју он има у том тренутку). Кутија се отвара и Аљошина сума се увећава или смањује, зависно од тога да ли је он погодио или није боју коцкице у кутији. Игра се наставља све док се не отворе све кутије. Која је највећа сума коју Аљоша може себи да гарантује, ако је њему познато да:

а) (3 поена) плавих коцкица има тачно 1;

б) (5 поена) плавих коцкица има тачно n.

(Напомена: Аљоша може да стави и 0, тј. може бесплатно да отвори кутију и види боју коцкице.)