29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 24. фебруар 2008. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) У конвексном шестоуглу ABCDEF наспрамне сатранице су међусобно паралелне (AB са DE, BC са EF и CD са FA), а такође је $AB=DE$. Докажите да је $BC=EF$ и $CD=FA$.

2. (5 поена) У равни је нацртано 10 једнаких дужи и означене су све њихове пресечне тачке. Показало се да свака пресечна тачка дели ма коју дуж која кроз њу пролази у размери 3:4. Колики је највећи могући број означених пресечних тачака?

3. (5 поена) Имамо 30 картица и на свакој је написан број: на дест картица – број a, на десет другхих – број b, а на десет преосталих – број c (бројеви a, b, c су сви различити). Познато је да за ма којих пет картица можемо изабрати још пет, тако да збир бројева на тих десет картица буде једнак нули. Докажите да је један од бројева a, b, c једнак нули.

4. (6 поена) Нађите све природне бројеве n за које је $(n+1)!$ дељиво са $1!+2!+...+n!$ ($k!$ је производ свих природних бројева од 1 до закључно са k).

5. (6 поена) Поља табле 10×10 обојена су црвеном, плавом и белом бојом. Ма која два поља са заједничком страницом обојена су разним бојама. Познато је да црвених поља има 30.

а) (2 поена) Докажите да је могуће увек изрезати 30 правоугаоника, од којих се сваки састоји од два поља – белог и плавог.

б) (2 поена) Наведите пример бојења те табле, када је могуће изрезати 40 таквих правоугаоника (и објасните зашто је он одговарајући).

в) (2 поена) Наведите пример бојења табле, када није могуће изрезати више од 30 таквих правоугаоника (и објасните зашто је он одговарајући).

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 24. фебруар 2008. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена. Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) Имамо 30 картица и на свакој је написан број: на десет картица – број a, на десет другхих – број b, а на десет преосталих – број c (бројеви a*, b, c* су сви различити). Познато је да за ма којих пет картица можемо изабрати још пет, тако да збир бројева на тих десет картица буде једнак нули. Докажите да је један од бројева a*, b, c* једнак нули.

2. (5 поена) Може ли најмањи заједнички садржалац целих бројева 1, 2, 3, ..., n бити 2008 пута већи од најмањег заједничког садржаоца целих бројева 1, 2, 3, ..., m ?

3. (5 поена) У троуглу *ABC* угао *A* је прав, *M* је средиште дужи *BC, H* – подножје висине из темена *A*. Права која пролази кроз тачку *M* и нормална је на *AC*, по други пут сече описану кружницу око троугла *AMC* у тачки *P*. Докажите да дуж *BP* полови дуж *AH*.

4. (5 поена) Дати су конвексан многоугао и квадрат. Познато је да, ма како поставили две копије многоугла унутар квадрата, постојаће тачка која припада и једном и другом од тих многоуглова. Докажите да, ма како поставили три копије многоугла унутар квадрата, постаојаће тачка која им припада.

5. (6 поена) Дата је таблица (на слици десно) у којој можемо замењивати места врстама, а такo|е и колонама (у било ком поретку). Колико различитих таблица можемо добити из дате таблице на такав начин?

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Сложенија варијанта, 9. март 2008. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. Број N представља производ два суседна природна броја. Докажите да:

а) (2 поена) том броју можемо дописати са десне стране две цифре тако да се добије тачан квадрат;

б) (2 поена) ако је $N>12$, то се може учинити на јединствен начин.

2. (5 поена) На страницама AB и BC троугла ABC изабране су редом тачке K и M тако да је $KM||AC$. Дужи AM и KC секу се у тачки O. Зна се да је $AK=AO$ и $KM=MC$. Докажите да је $AM=KB$.

3. (6 поена) Дата је карирана трака, издељена на квадратиће, ширине 1 квадратић и бесконачна на обе стране. Два поља те траке су клопке (замке), а између њих је N поља и на једном од њих налази се скакавац. При сваком потезу ми изговарамо природан број, после чега скакавац скаче за толики број поља лево или десно (по свом избору). За које N можемо изговорати бројеве тако да сигурно утерамо скакавца у једну од клопки, ма где он на почетку био између њих и ма како бирао правце својих скокова? (Ми све време видимо где се налази скакавац.)

4. (6 поена) Неколико (коначан број) тачака у равни обојено је у четири боје, при чему има тачака од сваке боје. Никоје три од тих тачака не леже на истој правој Докажите да се могу наћи три различита троугла (који се могу и сећи), таква да су им темена различитих боја и да унутар њих нема обојених тачака.

5. (7 поена) У кружном распореду стоји 99 деце и свако од њих у почетку има лопту. Сваког минута свако дете (које има лопту) баца лопту једном од својих суседа. При томе, ако две лопте дођу до једног детета, онда се једна од тих лопти избацује из игре неповратно. Кроз које најмање време код деце може остати само једна лопта?

6. (7 поена) Постоје ли природни бројеви $a, b, c, d,$ такви да је

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1, \quad \frac{a}{d}+\frac{c}{d}=2008?$$

7. (8 поена) Конвексни четвороугао $ABCD$ нема паралелних страница. Углови које странице тог четвороугла образују са дијагоналом AC (у неком поретку) су једнаки 16°, 19°, 55° и 55°. Колики може бити оштар угао између дијагонала AC и BD?

29. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Сложенија варијанта, 9. март 2008. год.

10−11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена. Поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. Од папира је изрезан троугао чији је један угао α. Затим је тај троугао разрезан на неколико троуглова. Може ли се догодити да сви углови свих добијених троуглова буду мањи од

а) (3 поена) у случају када је $\alpha = 70^0$;

б) (3 поена) у случају када је $\alpha = 80^0$?

2. (6 поена) На бројевној правој у тачки Р налази се "тачкасти" скакавац. Тачке 0 и 1 су клопке (замке). При сваком свом "потезу" ми изговарамо неки позитиван број, после чега скакавац скаче лево или десно (по свом избору) на растојање које је једнако том броју. За која P можемо изговарати бројеве, тако да гарантовано можемо сатерати скакавца у једну од клопки? (Ми све време видимо где се налази скакавац.)

3. (6 поена) Полином степена $n > 1$ има n различитих корена (нула) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Његов први извод има корене $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$. Докажите неједнакост

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

4. (7 поена) Пеђа и Васа нацртали су по један конвексан четвороугао без паралелних страница. Сваки од њих је у свом четвороуглу повукао по једну дијагоналу и одредио углове које та дијагонала образује са страницама његовог четвороугла. Пеђа је добио бројеве α, α, β и γ. (у неком поретку), а Васа исте те вредности (могуће и у неком другом поретку). Докажите да се дијагонале Пеђиног четвороугла секу под истим углом као и дијагонале Васиног четвороугла.

5. (8 поена) Сви природни бројеви написани су у неком поретку (сваки број по једном). Може ли се обавезно наћи неколико бројева (више од једног), који су написани редом један за другим (почев од неког места), а чији је збир прост број?

6. (8 поена) Једанаесторици мудраца завезали су очи и свакоме су ставили на главу капу која је обојена једном од 1000 боја. После тога су им одвезали очи и сваки је видео све капе осим своје. Затим истовремено сваки показује осталима једну од две картице - белу или црну. А после тога, сви треба истовремено да кажу боју своје капе. Да ли је то могуће? Мудраци се могу унапред (пре него што су им завезали очи) договарати како да поступају. Мудрацима је познато у којих 1000 боја могу бити капе.

7. (8 поена) Дате су две кружнице и три праве. Свака права на кружницама исеца тетиве исте дужине. Пресечне тачке правих граде троугао. Докажите да кружница описана око тог троугла пролази кроз средиште дужи која спаја средишта датих кружница.