26. Балканска математичка олимпијада

Крагујевац, Србија – 30. април 2009

1. У скупу природних бројева решити једначину

$$3^x - 5^y = z^2.$$

(Грчка)

2. У троуглу ABC, M и N су тачке на страницама AB и AC редом, такве да је права MN паралелна страници BC. Нека је P пресек правих BN и CM. Кружнице описане око $\triangle BMP$ и $\triangle CNP$ секу се у две различите тачке, P и Q. Доказати да је $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle CAP$. *(Молдавија)*

3. Правоугаоник димензија 9×12 је подељен на јединичне квадрате. Црвеном бојом су обојени центри свих јединичних квадрата, осим четири угаона и осам квадрата који имају заједничку страницу са неким од угаоних квадрата. Да ли је могуће означити црвене центре са $C_1, C_2, \ldots, C_{96}$, тако да су задовољена следећа два услова:

1° сва растојања $C_1C_2, C_2C_3, \ldots, C_{95}C_{96}, C_{96}C_1$ су једнака $\sqrt{13}$,

2° затворена изломљена линија $C_1C_2 \ldots C_{96}C_1$ је централно симетрична? *(Бугарска)*

4. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ за које важи

$$f\left(f(m)^2 + 2f(n)^2\right) = m^2 + 2n^2 \qquad \text{за све } m, n \in \mathbb{N}.$$

(Бугарска)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.