50th International Mathematical Olympiad
Bremen | Germany | 2009

Language: **Serbian**

Day: **1**

Среда, 15. јул 2009.

1. задатак Нека је n природан број и нека су $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geqslant 2)$ међусобно различити природни бројеви из скупа $\{1, \ldots, n\}$, такви да су бројеви $a_i(a_{i+1} - 1)$ дељиви са n за свако $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Доказати да број $a_k(a_1 - 1)$ није дељив са n.

2. задатак Нека је O центар описане кружнице троугла ABC. Нека су P и Q унутрашње тачке дужи CA и AB, редом. Тачке K, L и M су средишта дужи BP, CQ и PQ, редом. Γ је кружница која садржи тачке K, L и M.
Права PQ је тангента кружнице Γ. Доказати да је $OP = OQ$.

3. задатак Нека је $s_1, s_2, s_3, \ldots$ строго растући низ природних бројева, такав да су следећа два његова подниза

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{и} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

аритметичке прогресије. Доказати да је и низ $s_1, s_2, s_3, \ldots$ аритметичка прогресија.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

Четвртак, 16. јул 2009.

4. задатак У троуглу ABC је $AB = AC$. Симетрале углова $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ABC$ секу странице BC и CA у тачкама D и E, редом. Нека је K центар уписане кружнице троугла ADC. Нека је $\sphericalangle BEK = 45°$. Одредити све могуће вредности угла $\sphericalangle CAB$.

5. задатак Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (тј. функције из скупа природних бројева у скуп природних бројева) такве да, за све природне бројеве a и b, постоји недегенерисани троугао чије су странице дужина

$$a, \; f(b) \; \text{ и } \; f(b + f(a) - 1).$$

(Троугао је *недегенерисан* ако његова темена нису колинеарне тачке.)

6. задатак Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ међусобно различити природни бројеви и нека је M скуп који се састоји од $n-1$ природних бројева и не садржи број $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Скакавац треба да направи n скокова удесно по бројевној правој, кренувши из тачке чија је координата 0. Притом, дужине његових скокова морају бити једнаке бројевима $a_1, a_2, \ldots, a_n$ у неком редоследу. Доказати да се тај редослед може изабрати тако да скакавац ниједном не скочи у тачку чија је координата из скупа M.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена