50. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Бремен, Немачка – среда, 15. јул 2009.

1. Нека је n природан број и нека су $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geqslant 2$) међусобно различити природни бројеви из скупа $\{1, \ldots, n\}$ такви да су бројеви $a_i(a_{i+1} - 1)$ дељиви са n за свако $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Доказати да број $a_k(a_1 - 1)$ није дељив са n.

(Аустралија)

2. Тачка O је центар описаног круга троугла ABC, а P и Q унутрашње тачке дужи AC и AB, редом. Тачке K, L и M су средишта дужи BP, CQ и PQ, редом, а Γ је круг који пролази кроз тачке K, L и M.
Ако је права PQ тангента круга Γ, доказати да је $OP = OQ$. *(Русија)*

3. Нека је $s_1, s_2, s_3, \ldots$ строго растући низ природних бројева такав да су следећа два његова подниза

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{и} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

аритметичке прогресије. Доказати да је и низ $s_1, s_2, s_3, \ldots$ аритметичка прогресија.

(САД)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

50. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Бремен, Немачка – четвртак, 16. јул 2009.

4. У троуглу ABC је $AB = AC$. Симетрале углова CAB и ABC секу странице BC и CA редом у тачкама D и E. Нека је K центар уписаног круга троугла ADC. Ако је $\sphericalangle BEK = 45^\circ$, одредити све могуће вредности угла $\sphericalangle CAB$. *(Белгија)*

5. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да за све природне бројеве a и b постоји недегенерисани троугао чије су дужине страница

$$a,\ f(b) \quad \text{и} \quad f(b + f(a) - 1).$$

(Троугао је недегенерисан ако његова темена нису колинеарне тачке.)
(Француска)

6. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ међусобно различити природни бројеви и нека је M скуп који се састоји од $n-1$ природних бројева и не садржи број $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Скакавац треба да направи n скокова удесно по бројевној правој, кренувши из тачке чија је координата 0. Притом, дужине његових скокова морају бити једнаке бројевима $a_1, a_2, \ldots, a_n$ у неком редоследу. Доказати да се тај редослед може изабрати тако да скакавац ниједном не скочи у тачку чија је координата у скупу M. *(Русија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Претпоставимо, супротно тврђењу, да је $a_ia_{i+1} \equiv a_i \pmod n$ за $i = 1, 2, \ldots, k$ (индекси се рачунају по модулу k). Тада за свако j важи

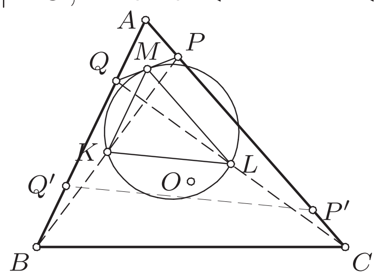
$$a_j \equiv a_ja_{j+1} \equiv a_ja_{j+1}a_{j+2} \equiv \cdots \equiv a_ja_{j+1}\cdots a_{j+k-1} = a_1a_2\cdots a_k$$

и одатле $a_1 \equiv \cdots \equiv a_k \pmod n$, контрадикција.

Друго решење. Претпоставимо да $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Означимо $d_i = (a_i, n)$. Како је $(d_i, a_i - 1) = 1$ и $d_i \mid n \mid a_{i-1}(a_i - 1)$, следи да $d_i \mid a_{i-1}$ и одатле $d_i \mid (a_{i-1}, n) = d_{i-1}$. Према томе, $d_k \mid d_{k-1} \mid \cdots \mid d_1 \mid d_0 = d_k$, и одатле $d_1 = \cdots = d_k = d$ за неко d. Истим закључивањем добијамо и $e_1 = \cdots = e_k = e$ за неко e, где је $e_i = (a_i - 1, n)$.

Приметимо да из $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ следи $n \mid de$. Сада из $s_i \equiv a_j \equiv 0 \pmod d$ и $s_i \equiv a_j \equiv 1 \pmod e$ добијамо $d_i \equiv a_j \pmod n$, контрадикција.

2. Пошто је PQ тангента на Γ и $MK \parallel AB$ и $ML \parallel AC$, имамо $\sphericalangle LKM = \sphericalangle LMP = \sphericalangle APQ$ и $\sphericalangle KLM = \sphericalangle KMQ = \sphericalangle AQP$, па су троуглови MKL и APQслични. Одавде је $\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB}$, тј. $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$. Приметимо да израз $AP \cdot PC$ представља потенцију тачке P у односу на описани круг $\triangle ABC$, те је једнак $OA^2 - OP^2$. Аналогно је $AQ \cdot QB = OA^2 - OQ^2$, одакле одмах следи $OP = OQ$.



Друго решење. Нека су P' и Q' тачке такве да је $\overrightarrow{P'C} = \overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{Q'B} = \overrightarrow{AQ}$. Тада је $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Q'A} + \overrightarrow{AP'}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{Q'P'}$, па је $Q'P' \parallel KL$. Сада је $\sphericalangle AQ'P' = \sphericalangle MKL = \sphericalangle APQ$, одакле следи да тачке P, Q, Q', P' леже на истом кругу. Центар тог круга је у пресеку симетрала дужи PP' и QQ', што је управо тачка O јер се те симетрале поклапају са симетралама дужи AC и AB. Одавде је $OP = OQ$.

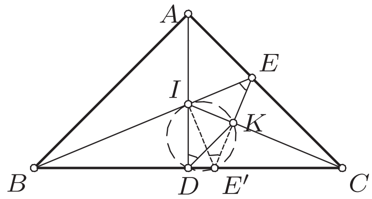
3. Нека је $s_{s_n} = an + b$ и $s_{s_n+1} = cn + d$ за све n, где су a, b, c, d константе. Из $an + b = s_{s_n} \leqslant cn + d = s_{s_n+1} \leqslant s_{s_{n+1}} = a(n+1) + b$ имамо $b - d \leqslant (c - a)n \leqslant a + b - d$ за све d, па мора бити $c = a$.

Како је низ (s_n) растући, важи $s_m - s_n \geqslant m - n$ за $m \geqslant n$. Зато је $1 \leqslant s_{n+1} - s_n \leqslant s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = a$, па постоје $m = \min\{s_{n+1} - s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $M = \max\{s_{n+1} - s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; нека је $s_{k+1} - s_k = m$ и $s_{l+1} - s_l = M$. Имамо

$$\begin{aligned} Mm \quad &\leqslant \textstyle\sum_{i=1}^{M} m \leqslant \sum_{i=1}^{M}(s_{s_k+i} - s_{s_k+i-1}) = s_{s_{k+1}} - s_{s_k} = a \\ &= s_{s_{l+1}} - s_{s_l} = \textstyle\sum_{i=1}^{m}(s_{s_l+i} - s_{s_l+i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} M \leqslant mM. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Према томе, све неједнакости у $(*)$ морају бити једнакости, те је (за $i = 1$) $m = s_{s_k+1} - s_{s_k} = d - b = s_{s_l+1} - s_{s_l} = M$, дакле $s_{n+1} - s_n$ је константно.

4. Означимо са I центар уписаног круга $\triangle ABC$, а са E' тачку симетричну тачки E у односу на праву CI. Како је $\sphericalangle IE'K = \sphericalangle IEK = 45^\circ = \sphericalangle IDK$, тачке I, D, E', K су на кругу.



Ако је $E' \equiv D$, троуглови IEC и IDC су подударни, па је $\sphericalangle BEC = 90^\circ$, одакле следи да је $\triangle ABC$ једнакостраничан и $\sphericalangle CAB = 60^\circ$. Заиста, у овом случају једнакост $\sphericalangle BEK = \sphericalangle IDK = 45^\circ$ тривијално важи.

Ако је $E' \not\equiv D$, тачке D и K су на кругу над пречником IE', па је $90^\circ = \sphericalangle IKE' = \sphericalangle IKE$. Даље је $\sphericalangle CIE = 45^\circ$ и $\sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = 135^\circ$, па је $\sphericalangle CAB = 90^\circ$. С друге стране, ако је $\sphericalangle CAB = 90^\circ$, нека нормала у K на CI сече AC и BC редом у $\bar{E}$ и $\bar{E}'$: тачке $I, D, \bar{E}', K$ су на кругу, па је $\sphericalangle I\bar{E}K = \sphericalangle I\bar{E}'K = \sphericalangle IDK = 45^\circ$ и $\sphericalangle CI\bar{E} = 45^\circ = \sphericalangle CIE$, па је $\bar{E} \equiv E$.

Према томе, могуће вредности угла CAB су 60° и 90°.

5. Заменом $a = 1$ добијамо да су 1, $f(b)$ и $f(b + f(1) - 1)$ странице троугла, па мора бити $f(b + f(1) - 1) = f(b)$. Ако је $f(1) \neq 1$, одавде следи да је функција f периодична, па важи $f(x) \leqslant M$ за неко M. Али тада $2M$, $f(b)$ и $f(b + f(2M) - 1)$ не могу бити странице троугла. Из ове контрадикције следи да је $f(1) = 1$.

За $b = 1$ имамо да су a, 1 и $f(f(a))$ странице троугла за свако a, одакле следи да је $f(f(a)) = a$, па је f бијекција. Стављањем $f(a)$ уместо a сада добијамо да су $f(a)$, $f(b)$ и $f(a + b - 1)$ странице троугла.

Означимо $z = f(2)$. Очигледно је $z > 1$ и $f(z) = 2$. Како су $f(z)$, $f(z)$ и $f(2z - 1)$ странице троугла, имамо $f(2z - 1) < 2f(z) = 4$, тј. $f(2z - 1) \in \{1, 2, 3\}$. Како је f бијекција и $2z - 1 \notin \{1, z\}$, могуће је једно $f(2z - 1) = 3$, тј. $f(3) = 2z - 1$.

Докажимо индукцијом по n да је $f(n) = (n-1)z - (n-2)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. То важи за $n \leqslant 2$; претпоставимо да важи за све $n < k$ $(k \geqslant 3)$. Пошто су $f((k-1)z-k+2)$, $f(z)$ и $f(kz-k+1)$ странице троугла, важи $f(kz-k+1) \leqslant k+1$, па из бијективности функције следи $f(kz - k + 1) = k + 1$ и одатле $f(k + 1) = kz - k + 1$, чиме је индукција завршена. Такође следи да је f растућа. То значи да из $z \geqslant 2$ следи $2 = f(z) \geqslant f(2) = z$, па је $z = 2$. Најзад, $f(n) = 2(n - 1) - n + 2 = n$. Лако се проверава да функција $f(n) = n$ задовољава услов задатка.

6. Доказујемо тврђење индукцијом по n. Случај $n = 1$ је тривијалан; претпоставимо да је $n \geqslant 2$ и да тврђење важи за све $k < n$. Нека је $a_1 < \cdots < a_n$ и $m = \min M$. Разликујемо два случаја.

1° $m < a_n$. Ако $a_n \notin M$, скакавац прави први скок дужине a_n. Након тога треба да направи скокове дужина $a_1, \dots, a_{n-1}$ тако да прескочи $n-2$ тачке из скупа $M \setminus \{m\}$, а то може да учини по индуктивној претпоставци.

Претпоставимо да је $a_n \in M$. Парови $(a_i, a_i + a_n)$ за $1 \leqslant i \leqslant n-1$ су међусобно дисјунктни, па бар један од њих не садржи ниједан елемент скупа $M \setminus \{a_n\}$ (а не садржи ни a_n). Нека је то пар $(a_k, a_k + a_n)$. Након два скока дужина a_k и a_n редом, скакавцу остаје да направи скокове дужина $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}$ тако да прескочи $n-3$ тачке скупа $M \setminus \{m, a_n\}$, што опет може по индуктивној претпоставци.

2° $m \geqslant a_n$. По индуктивној претпоставци, скакавац може да направи први скок дужине a_n и остале скокове неким редом $a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}}$ тако да заобиђе све тачке скупа $M \setminus \{m\}$. Ако притом не скочи ни у тачку m, доказ је готов; зато претпоставимо да у k-том скоку скочи у тачку m, тј. $a_n + a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k-1}} = m$. У том случају, он низом $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_n, a_{i_{k+1}}, \dots, a_{n-1}$ извршава захтев задатка. Заиста, и на овај начин он прескаче тачке скупа $M \setminus \{m\}$, али прескаче и тачку m јер је $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} < m < a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} + a_n$.