Личная письменная олимпиада «АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ». Решения

Младшая лига

1. Найдите наибольшее 65-значное число, произведение цифр которого равно сумме цифр.

2. Докажите для вещественных чисел $a \neq 0$, b неравенство

$$a^2 + b^2 + \frac{2}{a^2} + \frac{2b}{a} \geqslant 2$$

3. Простые числа p, q, r таковы, что $p + q + pq$ делится на r, $p + r + pr$ делится на q, $q + r + qr$ делится на p. Докажите, что $p = q = r$.

4. Различные вещественные числа a, b, c таковы, что из трех уравнений

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

любые два имеют ровно один общий корень. Найдите $a^2 + b^2 + c^2$.

Старшая лига

1. Решить систему:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 18; \\ (y+z)(x+y+z) = 30; \\ (z+x)(x+y+z) = 24. \end{cases}$$

2. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ равной степени называются *похожими*, если они получаются друг из друга перестановкой коэффициентов (например, похожи многочлены $2x^3 + x + 7$ и $x^3 + 2x^2 + 7x$). При каком наибольшем k для любых похожих многочленов $P(x)$, $Q(x)$ число $P(2009) - Q(2009)$ обязательно делится на k?

3. Докажите, что уравнение $x^3 - y^2 = 2000000$ имеет хотя бы два решения в натуральных числах.

4. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = 3$. Докажите, что

$$\frac{x}{x^3 + y^2 + z} + \frac{y}{y^3 + z^2 + x} + \frac{z}{z^3 + x^2 + y} \leqslant 1.$$

Решения.

Младшая лига

1. *Ответ:* $991111\ldots1$.

Заметим, что это число подходит. Пусть есть бо́льшее число. Тогда его сумма цифр не превосходит $9 \cdot 65$, и при этом первые две цифры — девятки. Тогда произведение всех остальных цифр не превосходит $9 \cdot 65/(9 \cdot 9) < 8$. Это означает, что кроме девяток, в числе не более двух цифр, превосходящих 1. Тогда на самом деле сумма цифр не превосходит $9 \cdot 4 + 61 = 97$, и произведение всех цифр, кроме первых девяток, не превосходит $97/(9 \cdot 9) < 2$, то есть все остальные цифры — единички.

2. Решение вытекает из следующего неравенства:

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant 0$$

3. Пусть два из них совпадают, например, $p = q$. Тогда $p + r + pr$ делится на q, и $p + pr$ делится на q. Значит, r делится на q, и все три числа совпадают.

Пусть теперь все три числа различны. Рассмотрим сумму $s = p + q + r + pq + qr + rp$. Из условия следует, что s делится на каждое из чисел p, q, r, а значит, и на их произведение. Заметим, что числа p, q, r не равны 2 (иначе s нечетна, но делится на 2 — противоречие). Тогда

$$\frac{s}{pqr} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{35} < 1$$

а это невозможно, так как s делится на pqr.

4. Заметим, что общий корень первых двух уравнений — это и корень их разности. Получаем, что он равен $p = \frac{c-b}{a-b}$; аналогично для остальных общих корней: $q = \frac{a-c}{b-c}$ и $r = \frac{b-a}{c-a}$. Среди чисел такого вида обязательно найдутся два разного знака, то есть p, q, r не все совпадают.

Заметим, что если $p = q$, то $p = q = r$, но это невозможно. Значит, p, q, r попарно различны, а трехчлены представляются в таком виде: $(x+p)(x+r)$, $(x+q)(x+p)$, $(x+r)(x+q)$; по теореме Виета

$$\begin{cases} a = p+q = qr \\ b = q+r = rp \\ c = r+p = pq \end{cases}$$

Получаем $2(p+q+r) = pq+qr+rp$; $p-r = r(q-p)$. Последнее равенство можно домножить на два аналогичных, и получить $pqr = 1$. Также из системы получаем равенство $p = q(r-1)$. Домножая его на аналогичные, получаем $(p-1)(q-1)(r-1) = 1$. Раскрыв скобки, легко получить $p+q+r = -1$ и $pq+qr+rp = -2$. Далее

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= 2(p^2+q^2+r^2) + 2(pq+qr+rp) = \\ &= 2(p+q+r)^2 - 2(pq+qr+rp) = 6 \end{aligned}$$

Старшая лига

1. *Ответ:* $(1, 2, 3)$ и $(-1, -2, -3)$

Сложим все уравнения, получим $2(x+y+z)^2 = 72$, $x+y+z = \pm 6$. Подставляем

$$\begin{cases} x+y = \pm 3; \\ y+z = \pm 5; \\ z+x = \pm 4. \end{cases}$$

Получаем два решения $x = \pm 1$, $y = \pm 2$, $z = \pm 3$ (плюсы и минусы возникают одновременно).

2. *Ответ:* 2008.

Заметим, что у похожих многочленов суммы коэффициентов совпадают, то есть $P(1) = Q(1)$. Тогда 1 — корень многочлена $P(x) - Q(x)$, то есть $P(x) - Q(x) = (x-1) \cdot R(x)$, где $R(x)$ — также многочлен с целыми коэффициентами. Тогда $P(2009) - Q(2009) = 2008 \cdot R(2009)$. С другой стороны, при $P(x) = x$ и $Q(x) = 1$ ясно, что большего k не существует.

3. Один корень — это $(300, 5000)$: $300^3 - 5000^2 = 2 \cdot 10^6$. Попробуем подвигать решение, и найти еще одно: $(300-t)^3 - (5000-\lambda t)^2 = 2 \cdot 10^6$. Ясно, что если раскрыть скобки, то получится кубическое уравнение относительно t; причем $t = 0$ — корень, то есть уравнение сводится к квадратному. Варьируя λ, попробуем обнулить коэффициент при t, чтобы уравнение свелось к линейному. Коэффициент при t равен $10000\lambda - 3 \cdot 300^2$, откуда $\lambda = 27$. Получаем $t = 900 - 27^2 = 171$, откуда получаем второе решение $x = 129$, $y = 383$.

4. Сначала оценим одну дробь:

$$\frac{x}{x^3+y^2+z} = \frac{x(\frac{1}{x}+1+z)}{(x^3+y^2+z)(\frac{1}{x}+1+z)} \leqslant \frac{1+x+xz}{9}$$

(Знаменатель оценивается по неравенству Коши-Буняковского.)

Сложив оценки, получаем

$$\frac{3+x+y+z+xz+yx+zy}{9} \leqslant \frac{3}{9} + \frac{x+y+z}{9} + \frac{(x+y+z)^2}{27} \leqslant 1$$

Личная письменная олимпиада «ГЕОМЕТРИЯ». Решения

Младшая лига

1. ABC — остроугольный треугольник, AD — его биссектриса, а BM — высота. Докажите, что $\angle DMC > 45°$.

2. $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD. На основаниях во внешнюю сторону от $ABCD$ построены правильные треугольники ADK и BCL. Докажите, что AC, BD и KL пересекаются в одной точке.

3. Разрежьте квадрат на 5 частей, из которых можно составить 3 попарно различных квадрата.

4. В $\triangle ABC$ $AB = AC$, $\angle BAC = 100°$. Внутри $\triangle ABC$ взята такая точка M, что $\angle MCB = 20°$, $\angle MBC = 30°$. Найдите $\angle BAM$.

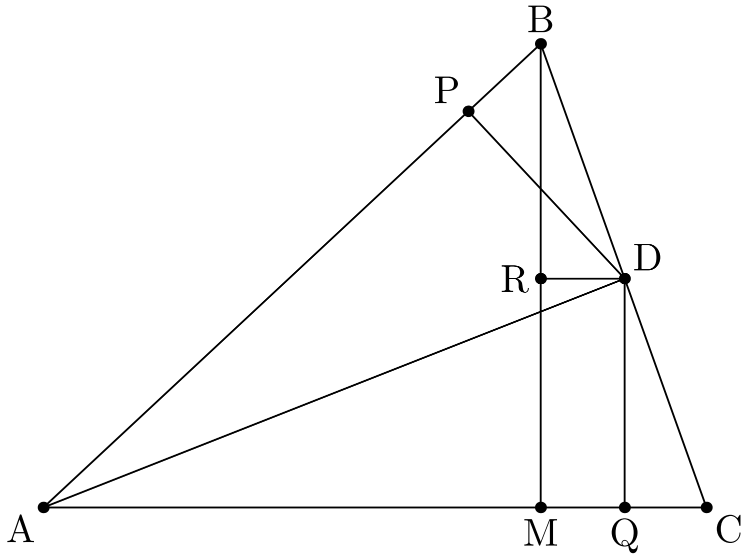


Рис. 1: К решению задачи 1

Старшая лига

1. ABC — остроугольный треугольник, AD — его биссектриса, а BM — высота. Докажите, что $\angle DMC > 45^\circ$.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром BD. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BD, точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC. Пусть P — точка пересечения прямых CA_1 и BD, Q — точка пересечения прямых DB_1 и AC. Докажите, что $AC \perp PQ$.

3. Дан произвольный тетраэдр. Отрезки, соединяющие вершины с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в точке M. Докажите, что из проекций точки M на грани тетраэдра по крайней мере две попадают внутрь соответствующих граней.

4. Пусть ω — описанная окружность неравнобедренного треугольника ABC. Окружность γ касается прямых AB и AC в точках P и Q соответственно, а окружности ω — внутренним образом в точке T. Прямые AT и PQ пересекаются в точке S. Докажите, что описанная окружность треугольника IST, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC, касается ω.

Решения.

Младшая лига

1. Опустим перпендикуляры DP, DQ и DR на прямые AB, AC и BM соответственно. (см. рис. 1).
С одной стороны $\angle PBD > \angle RBD$, поэтому $PD > RD$. С другой стороны $PD = QD$, поскольку AD — биссектриса. Таким образом, $QD > RD$, откуда следует, что $\angle DMC > 45^\circ$.

2. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. (см. рис. 2).
Из подобия треугольников BOC и DOA получаем, что $\frac{OB}{BC} = \frac{OD}{AD}$. Значит, $\frac{OB}{BL} = \frac{OD}{DK}$. Кроме того, $\angle OBL = 60^\circ + \angle OBC = 60^\circ + \angle ODA = \angle ODK$. Таким образом, $\triangle OBL \sim \triangle ODK$. Отсюда $\angle BOL = \angle DOK$, поэтому точки L, O и K лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

3. Приведем один из возможных примеров разрезания. См. рис. 3. Три квадрата: два закрашены, и составленный из трех фигур третий квадрат.

4. Построим точку M', симметричную M относительно прямой BC. (см. рис. 4). $\angle BM'C = \angle BMC = 130^\circ = 180^\circ - \frac{\angle BAC}{2}$, поэтому точка M' лежит на окружности с центром в A и радиусом AB. $\angle BM'M = \angle BMM' = 90^\circ - \angle MBC = 60^\circ$, $\angle MBM' = 2\angle MBC = 60^\circ$. Тогда $\angle MM'B = 180^\circ - \angle MBM' - \angle BMM' = 60^\circ = \angle MBM'$. Значит, точка M' лежит на биссектрисе равнобедренного треугольника BAM' и $\angle BAM = \angle MAM' = \frac{\angle BAM'}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle ABM'}{2} = 20^\circ$.

Старшая лига

1. Опустим перпендикуляры DP, DQ и DR на прямые AB, AC и BM соответственно. (см. рис. 5).

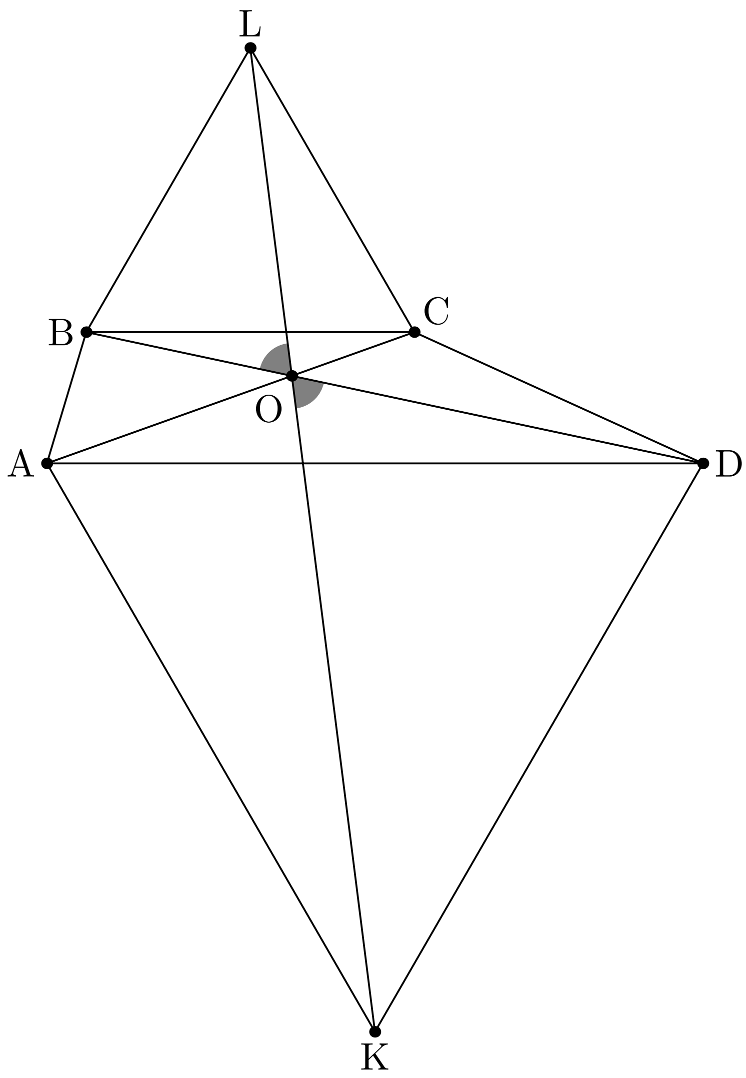


Рис. 2: к решению задачи 2

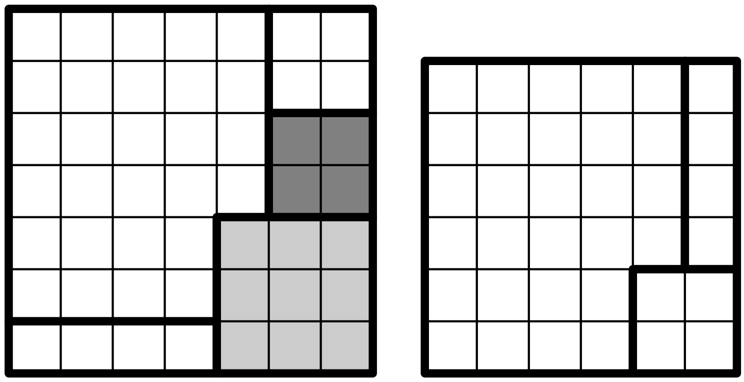


Рис. 3: к решению задачи 3

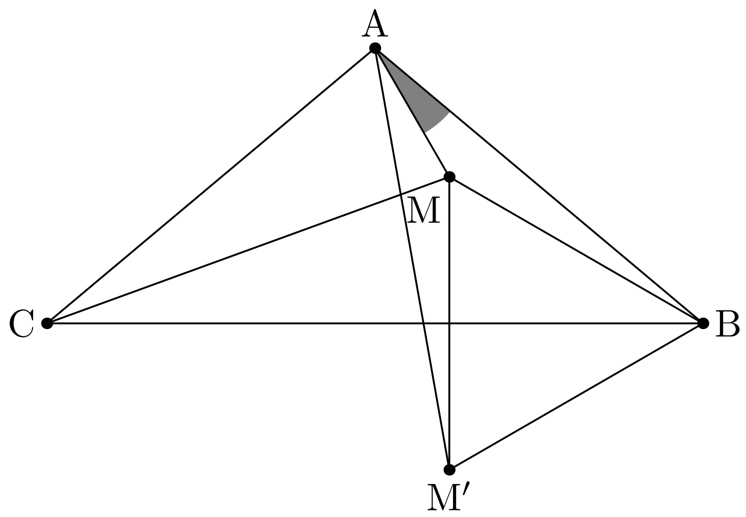


Рис. 4: к решению задачи 4

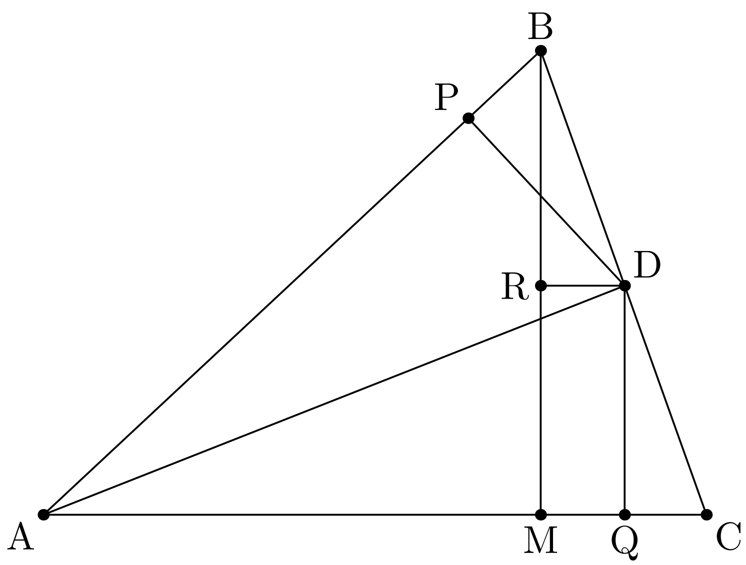


Рис. 5: к решению задачи 1

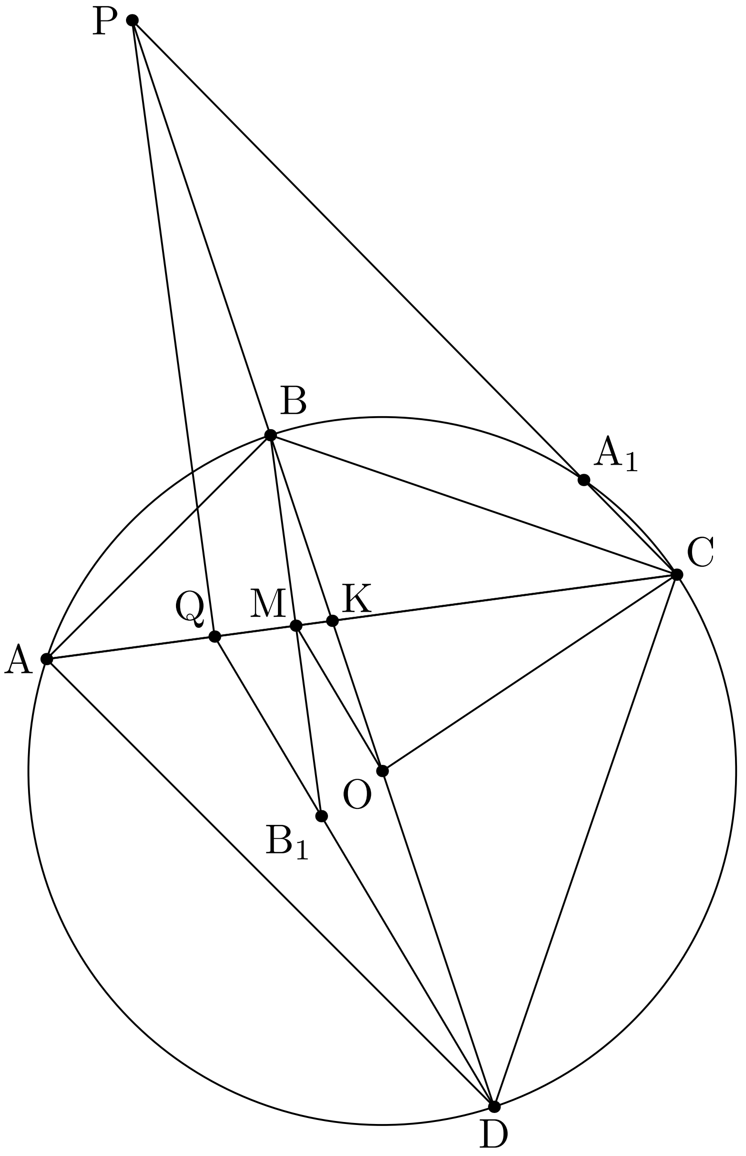


Рис. 6: к решению задачи 2

С одной стороны $\angle PBD > \angle RBD$, поэтому $PD > RD$. С другой стороны $PD = QD$, поскольку AD — биссектриса. Таким образом, $QD > RD$, откуда следует, что $\angle DMC > 45^\circ$.

2. Пусть K — точка пересечения прямых AC и BD, M — точка пересечения прямых BB_1 и AC, O — центр окружности, а r — величина ее радиуса. (см. рис. 6).
$\angle ACO = 90^\circ - \frac{\breve{AB}+\breve{BC}}{2}$. $\angle OPC = \frac{\breve{CD}}{2} - \frac{\breve{BA_1}}{2} = 90^\circ - \frac{\breve{BC}}{2} - \frac{\breve{AB}}{2} = \angle ACO$. Значит, $\triangle OPC \sim \triangle OCK$. Следовательно, $\frac{OC}{OK} = \frac{OP}{OC}$, поэтому $OK \cdot OP = r^2$. Отсюда $OK \cdot (OP - r) = r \cdot (r - OK)$, то есть $OK \cdot BP = KB \cdot OD$. Получаем, что $\frac{KB}{BP} = \frac{OK}{OD}$.
Теперь заметим, что отрезок OM — средняя линия треугольника B_1BD и тем самым $OM \parallel QD$. Отсюда по теореме Фалеса $\frac{MK}{MQ} = \frac{OK}{OD} = \frac{KB}{BP}$, поэтому $PQ \parallel BM$, и, следовательно $PQ \perp AC$.

3. Упорядочим грани тетраэдра по их площадям (если есть равные, то возьмем для них произвольный порядок). Будем доказывать, что проекции центра масс на плоскости грани с максимальной площадью и грани со второй по величине площадью попадают внутрь самих граней. Пусть ABC — это одна из двух указанных граней тетраэдра $ABCD$. Без ограничения общности будет считать, что $S(ABC) \geqslant S(ABD)$ и $S(ABC) \geqslant S(ACD)$. Пусть D' — проекция точки D на плоскость (ABC). Тогда $S(ABC) > S(ABD')$ и $S(ABC) > S(ACD')$. Геометрическое место таких точек K, что $S(ABK) < S(ABC)$ и $S(ACK) < S(ABC)$, является параллелограммом P, стороны которого параллельны прямым AB и AC и удалены от них на то же расстояние, что и точки C и B соответственно. Пусть M' — проекция центра масс на грань ABC, а K — центр масс самой грани. Тогда точка M' делит отрезок $D'K$ в отношении $3:1$. Поскольку D' попадает внутрь P, то M' должна попасть внутрь образа P при гомотетии с центром в K и коэффициентом $\frac{1}{4}$. Нетрудно убедиться, что этот образ целиком помещается внутрь треугольника ABC. (см. рис. 7).

4. Обозначим через K середину дуги AB, не содержащей C (см. рис. 8). Рассмотрим гомотетию с центром в T, пере-

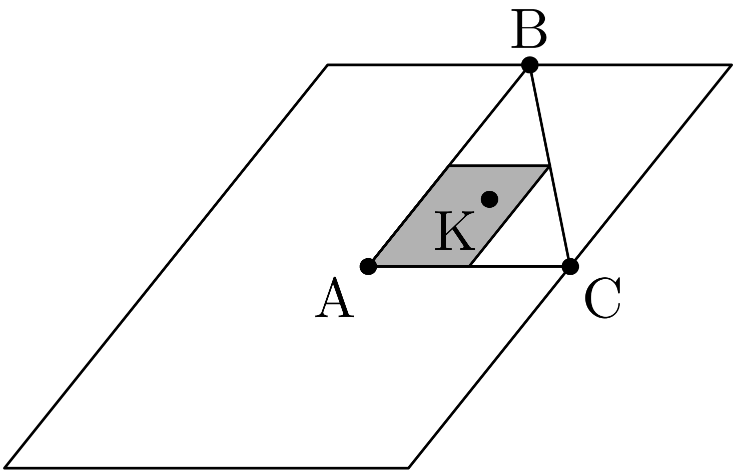


Рис. 7: к решению задачи 3

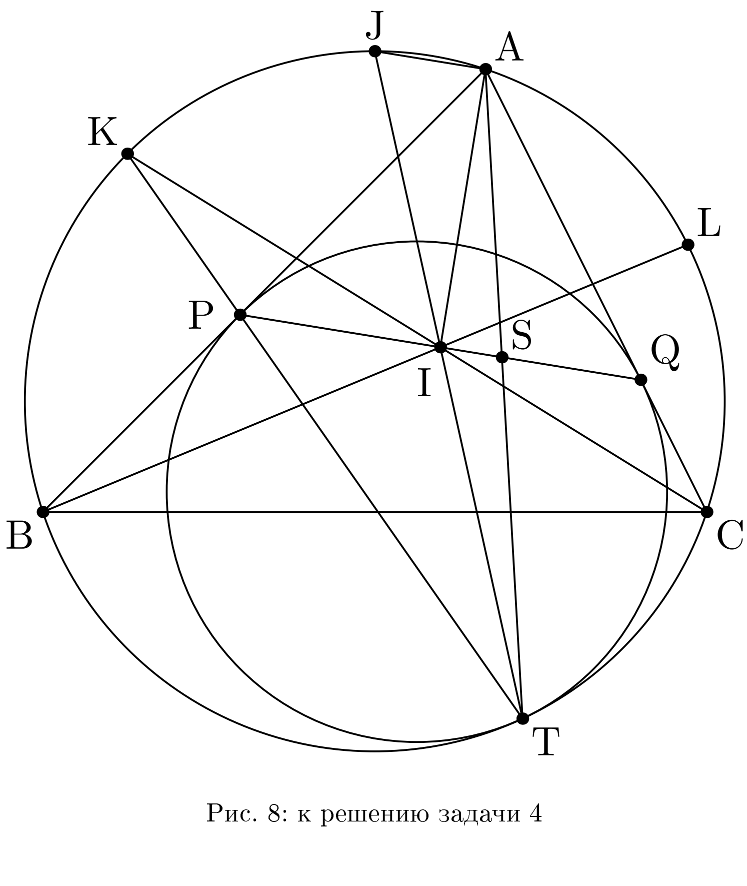


Рис. 8: к решению задачи 4

водящую окружность γ в окружность ω. Прямая AB в результате этой гомотетии переходит в параллельную прямую, касающуюся окружности ω. Такая прямая касается ω в точке K. Кроме того, эта прямая должна проходить через образ точки P. Тем самым K является образом точки P, и точки K, P и T лежат на одной прямой.
$\angle KTB = \frac{\breve{KB}}{2} = \frac{\breve{KA}}{2} = \angle KBA$. Тогда $\triangle KPB \sim \triangle KBT$, поэтому $\frac{KP}{KB} = \frac{KB}{KT}$ и $KB^2 = KP \cdot KT$.
$\angle KBI = \angle KBA + \angle ABI = \angle KBA + \angle ABI = \frac{\angle C + \angle B}{2}$. $\angle BKI = \angle A$. Следовательно, $\angle KIB = 180° - \angle KBI - \angle BKI = 180° - \frac{\angle C+\angle B}{2} - \angle A = \angle C + \angle B - \frac{\angle C+\angle B}{2} = \frac{\angle C+\angle B}{2} = \angle KBI$. Отсюда $KB = KI$.
Тем самым мы получили, что $KI^2 = KB^2 = KP \cdot KT$. Значит, $\triangle KIP \sim \triangle KTI$. $\angle KTI = \angle KIP$. Аналогично для L — середины дуги AC, не содержащей B, — получаем, что $\angle LIQ = \angle LTI$. Докажем, что I лежит на отрезке PQ. Предположим, что это не так и I лежит по ту же сторону от прямой PQ, что и A (по другую сторону разбирается аналогично). Пусть CI пересекает PQ в точке I_1, а BI — в точке I_2. Тогда $\angle KIP > \angle KI_1P = \angle PQA - \angle ICA = (90° - \frac{\angle A}{2}) - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle B}{2}$, $\angle LIQ > \angle LI_2Q = \angle QPA - \angle IBA = (90° - \frac{\angle A}{2}) - \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C}{2}$. Отсюда получаем, что $\angle LTK = \angle LTI + \angle KTI = \angle LIP + \angle KTP > \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2}$. С другой стороны $\angle LTK = \frac{\breve{LK}}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2}$. Противоречие. Значит, I действительно лежит на PQ. Таким образом, $\angle KTI = \angle KIP = \frac{\angle B}{2}$.
Пусть J — вторая точка пересечения окружности ω с прямой TI. Тогда $\angle BAJ = \angle BTJ = \angle BTK + \angle KTI = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90° - \frac{\angle A}{2} = \angle APQ$. Следовательно, $AJ \parallel PQ$ (поскольку $\angle B \neq \angle C$, точки A и J не совпадают). Рассмотрим гомотетию, переводящую точку S в точку A. Образом I при этой гомотетии будет J. Заметим, что описанная окружность треугольника IST должны перейти в описанную окружность треугольника JAT, то есть в ω. Значит, они касаются в точке T, что и требовалось доказать.

Личная устная олимпиада «КОМБИНАТОРИКА И ЛОГИКА». Решения

Младшая лига

1. Назовем участника кругового турнира (каждый играет с каждым) *странным*, если он выиграл у всех, кто набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше очков, чем он (победа дает 1 очко, ничья — $1/2$, проигрыш — 0). Докажите, что все странные участники набрали одинаковое число очков.

2. На одном первобытном базаре шкура мамонта обменивалась на две шкуры саблезубого тигра, а юбка из перьев павлина — на три каменных копья. На другом базаре, который находился в одном дне пути от первого, шкура мамонта обменивалась на три юбки из перьев павлина, а шкура тигра — на четыре копья. Все обмены можно осуществлять в обе стороны. Охотник принес на первый базар шкуру мамонта и хочет выменять ее на четыре тигровых шкуры. Успеет ли он это сделать за 33 дня?

3. Трое игроков — Веня, Беня и Женя ходят по очереди. Первым ходит Веня, затем — Беня, затем — Женя и т.д. Каждый игрок в свой черед забирает один или два камня из кучи, в которой в начале находится 5769 камней. Забравший последний камень получает 10\$, следующий в очереди за ним — 1\$, оставшийся ничего не получает. Кто и сколько получает при правильной игре (без сговора и коалиций)?

4. У профессора есть n утверждений (A_1, A_2, ..., A_n). Он задает своим аспирантам темы диссертационных работ: «доказать, что из A_i следует A_j». Диссертация не должна быть непосредственным логическим следствием ранее защищенных работ. Какое максимальное число аспирантов может быть у профессора?

5. В таблице $n \times n$ клеток стоят «+» и «−». Разрешается взять клетку и поменять знаки в столбце и строке, проходящей через эту клетку (при этом знак самой клетки тоже меняется). Найти все n, при которых из любого начального расположения знаков в таблице можно перейти к таблице из одних плюсов.

Старшая лига

1. В некоторой стране, состоящей из 9 областей, имеется 5 городов и 19 поселков. Каждый город связан (двусторонним) прямым автобусным сообщением по крайней мере с 14 другими населенными пунктами, а каждый поселок — не более чем с тремя. Докажите, что в одной из областей между любыми двумя населенными пунктами нет прямого автобусного сообщения.

2. Дан выпуклый многоугольник M и точка P внутри него. Пусть N — количество вершин M таких, что отрезок, соединяющий P с этой вершиной делит угол при ней на два острых, n — количество сторон, таких, что основание перпендикуляра, опущенного из точки P на эту сторону, попадает на отрезок стороны, а не на ее продолжение. Докажите, что $n = N$.

3. $f(x) = 2|x - 1/2| - 1$, $f^{(n)}(x) = f(f(\ldots f(x)\ldots))$ (f повторяется n раз). Пусть L — ломаная, являющаяся графиком функции $f^{(2009)}(x)$. Сколько звеньев имеет ломаная L?

4. Плоскость замощена шестиугольниками с единичной стороной, каждый из которых раскрашен либо в черный, либо в белый цвет. Докажите, что найдутся два одноцветных шестиугольника на расстоянии больше, чем 2009, соединенные цепочкой из шестиугольников того же цвета.

5. Функция $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ называется *дискретно гармонической*, если ее значение в точке равно среднему арифметическому ее соседей по вертикали и горизонтали. Предположим, что известны значения такой функции f во всех ненулевых точках с четными координатами. Можно ли по этой информации восстановить значение f в начале координат?

Решения.

Младшая лига

1. Пусть A и B — два странных участника, набравших разное число очков. Ничья между ними невозможна и без ограничения общности можно считать, что A выиграл у B. Тогда при этом A набрал меньше очков, чем B. Следовательно, B сыграл с некоторым участником C строго лучше, чем A. Тогда либо B выиграл у C, либо C выиграл у A.
Если B выиграл у C, то по странности B у C больше очков, чем у B, и тем более, чем у A. Но тогда по странности A A выиграл у C, что противоречит тому, что C сыграл с A и B по разному.
Аналогично разбирается случай, когда C проиграл A.

2. *Ответ:* успеет.
Пусть M — шкура мамонта, T — шкура тигра, Π — юбка из павлина, K — копье. I — первый базар: $M = 3\Pi$, $T = 4K$; II — второй базар: $M = 2T$, $\Pi = 3K$.
1 день. Перешел с I на II и разменял M на 3Π.
2 день. Перешел с II на I и разменял 3Π на $9K$.
3 день. Перешел с I на II и разменял $9K$ на $2T$ и K.
4 день. Перешел с II на I и разменял $2T$ и K на M и K. Итак, за 4 дня охотник добавил к шкуре мамонта одно копье. За 32 дня он добавит к шкуре мамонта 8 копий, которые можно разменять еще на две шкуры тигра. Точнее, на 31-й день у него будет 16 копий, которые он разменяет на 4 шкуры тигра.

3. *Ответ:* Веня заберет 10\$, Беня заберет 1\$, Женя заберет 0\$.
Анализ с конца. Если перед ходом игрока остается 2 камня, он получает большой приз, предыдущий получает 0\$, следующий 1\$. Если же остаются 3 камня, то он получает 0\$, следующий 10\$, следующий по циклу 1\$.
Если остается 4 камня, то игрок может перейти к куче из 3 или 2 камней. В этом случае ему выгодно взять один камень и через ход получить 1\$. Итак, из ситуации в 4 камня игрок идет в 3 и предыдущий получает гран-при. Следовательно, в ситуации 5 или 6 камней игрок получает 10\$. Значит, в ситуации 7 камней ходящий игрок получает 0\$. Итак, мы видим, что ситуация с n камнями однозначно определяется ситуациями с $n-1$ и с $n-2$ камнями. Значит, последовательность исходов переходит в себя при сдвиге $5 \to 1$, $6 \to 2$. Следовательно, она периодична с периодом 4, так что исход для n камней однозначно определяется остатком n по модулю 4, а $5769 \equiv 1 \mod 4$.

4. *Ответ:* $n(n-1)/2 + 1$.
Докажем, что больше нельзя. Прежде всего заметим, что если диссертаций, в которых выводилось утверждение A_i или, наоборот, из утверждения A_i выводилось некоторое другое утверждение A_j не больше n, то, выбросив все такие защиты, получим ситуацию с меньшим числом утверждений, так что дело завершает индукция.
Итак, пусть для любого A_i таких диссертаций не меньше $n+1$. Рассмотрим граф. Его вершины — A_i; ребро между A_i и A_j проводятся, если были защищены обе диссертации, которые их связывают (то есть в обе стороны). Тогда каждая вершина соединена с другими не менее чем двумя ребрами. (Иначе диссертаций, в которых фигурировало утверждение A_i не больше n.)
В этом случае ребра образуют цикл некоторой длины k. Это невозможно: ребру отвечает пара противоположных стрелок и среди $2k$ стрелок (защит диссертаций), отвечающих черточкам цикла, найдется последняя по времени. Но тогда соответствующая тема диссертации будет следовать из ранее защищенных. Получили противоречие.

5. *Ответ:* при четных n.
Пусть n нечетно. Раскрасим доску $n \times n$ в шахматном порядке так, чтобы центр был черным. Несложно убедится, что на каждом кресте (объединении строки и столбца) будет четное число белых клеток. Тогда четность числа знаков $-$ на белых полях будет инвариантом.

С другой стороны, при четном n возьмем крест K_C, с центром в клетке C. $C_i \neq C(i = 1, \dots, 2n-2)$ — другие клетки этого креста. Тогда если произвести операции замена знаков в K_C, а также во всех K_{C_i} одновременно, то в результате в каждой клетке, кроме C знаки поменяются четное число раз, а в клетке C — нечетное. Таким образом, мы научились менять знак только в одной клетке.

Старшая лига

1. Из каждого города выходит не менее 14 ребер (автобусных сообщений), следовательно, не менее 10 ребер связывают город с поселками, т.е. всего есть не менее 50 ребер, связывающих города с поселками. С другой стороны из всех поселков выходит не более, чем $19 \cdot 3 = 57$ ребер, следовательно, в стране есть не более чем $(57-50)/2$ ребер, связывающих поселки. Т.е. между поселками проложено не более, чем три ребра. Рассмотрим области, не содержащие городов. Таких по крайней мере $4 = 9 - 5$. В этих областях есть только поселки и не более трех ребер, связывающих поселки, следовательно, хотя бы в одной из областей нет ни одного ребра. Эта область удовлетворяет требованию задачи.

2. Заметим, что перпендикуляр из точки P падает на продолжение стороны в том и только том случае, если один из рассматриваемых в задаче углов тупой. Кроме того, понятно, что угол многоугольника не может делиться на два тупых угла (их сумма даст больше 180^o) и к одной стороне треугольника не может прилегать два тупых угла из рассматриваемых в задаче (т.к. две смежные вершины многоугольника и точка P образуют треугольник с суммой углов 180^o). Поэтому каждой стороне многоугольника, не сосчитанной при подсчете n, соответствует ровно один угол, не сосчитанный при подсчете N. Учитывая, что общее количество сторон многоугольника равно количеству его углов, получаем, что $N = n$.

3. *Ответ:* 2^{2009}.
График функции $f(x)$ представляет собой «галочку» с минимумом в точке $(\frac{1}{2}; -1)$, проходящую через точки $(-1, 2)$ и $(2, 2)$. Рассмотрим, что происходит с графиком при подстановке его в функцию f. Сперва весь график смещается вниз на $\frac{1}{2}$, затем та его часть, которая оказалась ниже оси координат переворачивается, затем график растягивается в два раза и смещается вниз на 1. При этом преобразовании каждая «галочка», расположенная между прямыми $y = -1$ и $y = 2$ переходит в две аналогичные, но вдвое более узкие галочки, у которых точки с ординатами 2 остаются на месте, минимумы (имевшие ординаты -1) переходят в максимумы с ординатами 2, точки с ординатами $1/2$ переходят в новые минимумы. Таким образом, каждое взятие функции f удваивает количество звеньев ломанной. У первой функции 2 звена, следовательно, у 2009 функции 2^{2009} звеньев.

4. Нам нужно научиться находить одноцветные (связные) области сколь угодно большого диаметра. Пойдем от противного. Пусть все одноцветные области ограничены. Возьмем любую одноцветную область A_1, и рассмотрим клетки противоположного цвета, которые прилегают к A_1 снаружи. Они все лежат в некоторой области A_2 противоположного цвета, причем диаметр у A_2 больше, чем у A_1. Аналогично строим области $A_3, \dots$. Их диаметры неограниченно возрастают.

5. *Ответ:* Можно.
Пусть x, y есть операторы сдвига: $x\colon f(m,n) \to f(m+1,n)$, $y\colon f(m,n) \to f(m,n+1)$, 1 есть тождественный оператор: $1\colon f(m,n) \to f(m,n)$. Тогда гармоническая функция — это та, которую аннулирует оператор $P(x,y) = 1 - \frac{x+x^{-1}+y+y^{-1}}{4}$. Достаточно найти оператор вида $Q(x^2, y^2)$, делящийся на $P(x,y)$. Тогда $Q(x^2, y^2)$ также аннулирует все дискретно гармонические функции. С другой стороны, он отвечает наличию линейной комбинации между значениями функции в точках с координатами той же четности. В качестве многочлена $Q(x^2, y^2)$ достаточно взять многочлен $P(x,y)P(-x,y)P(x,-y)P(-x,-y)$.

Командная устная олимпиада. Решения

Младшая лига

1. (3) Встретились как-то раз рыцарь, лжец и политик. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет, а политик может как лгать, так и говорить правду. Когда их спросили, кто из них кто, первый ответил «лжец», второй — «рыцарь», а третий — «политик». Кто из них кто?

2. (4) Есть 4 одинаковые банки, в них 4 разные краски, каждая банка заполнена на $\frac{3}{4}$. Разрешается переливать любую часть жидкости из одной банки в другую (если поместится). Можно ли во всех банках сделать одинаковую смесь? Выливать краску нельзя.

3. (5) Клетки прямоугольника 99×101 раскрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется клетка, для которой в содержащих ее строке и столбце найдется еще хотя бы 99 клеток того же цвета.

4. (5) Докажите, что следующие две гипотезы равносильны:
(i) существует бесконечно много пар простых чисел с разностью 2;
(ii) существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $6uv \pm u \pm v$ ни при каких натуральных u, v и ни при каком выборе знаков.

5. (7) Внутри треугольника ABC выбрана точка D. Описанные окружности треугольников CAD и CBD пересекают отрезки CB и CA соответственно в точках E и F. Оказалось, что $BE = AF$. Докажите, что CD — биссектриса угла $\angle ACB$.

6. (8) Какие натуральные числа можно представить в виде $[x, y] + [y, z] + [z, x]$ с натуральными x, y, z? $[a, b]$ — это наименьшее общее кратное чисел a и b.

7. (8) Дан параллелограмм $ABCD$. На лучах DB и AC нашлись такие точки K и L соответственно, что $KL \| BC$, $\angle BCD = 2\angle KLD$. Докажите, что $AK \perp DL$.

8. (9) В стране 101 аэропорт. Каждое возможное направление обслуживается ровно одной авиакомпанией (в обе стороны сразу). Известно, что ни одна авиакомпания не может организовать круговое турне, в котором городов больше двух и города не повторяется. Каково наименьшее возможное количество авиакомпаний?

9. (11) Докажите для положительных чисел x, y, z неравенство $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz + 4(x - y)(y - z)(z - x)$.

Старшая лига

1. (3) Точку на стороне правильного треугольника спроектировали на две другие стороны. Докажите, что прямая, соединяющая исходную точку с центром треугольника, делит пополам отрезок между проекциями.

2. (4) Докажите, что следующие две гипотезы равносильны:
(i) существует бесконечно много пар простых чисел с разностью 2;
(ii) существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $6uv \pm u \pm v$ ни при каких натуральных u, v и ни при каком выборе знаков.

3. (5) В пространстве, разбитом на единичные кубики с целыми вершинами координат, проведена плоскость $x+y+z = 0$. Найдите значения площадей кусков, на которые она разбивается гранями кубиков.

4. (6) В каждой клетке таблицы 100×100 написано число из отрезка $[-1, 1]$. При этом сумма всех чисел равна 0, сумма всех чисел в каждой строке по модулю не меньше c, и сумма всех чисел в каждом столбце по модулю не меньше c. Найдите наибольшее возможное значение c.

5. (7) Треугольник ABC с тупым углом C, вписан в окружность с центром O. Оказалось, что $AC + BC = 2OC$. Отрезок OC пересекает сторону AB в точке D. Докажите, что вписанные окружности треугольников ADC и BDC равны.

6. (7) Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y^2 f(y)$ для всех вещественных x, y.

7. (8) В кадетском корпусе учится 250 кадетов. Каждый кадет дружит не более чем с 10 другими. На бал каждый кадет привел сестру, у которой нет братьев среди остальных кадетов. Докажите, что эти 500 людей могут закружиться в вальсе так, что ни один не танцует со своей сестрой и для любых двух друзей их сестры танцуют с кадетами, которые не являются друзьями.

8. (9) Докажите для положительных чисел a, b, c неравенство

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3(a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ac} \geqslant \frac{4}{3}$$

9. (11) На плоскости дано $6k$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что некоторая точка плоскости содержится хотя бы в $8k^3$ различных треугольниках с вершинами в этих точках (треугольники содержат свою границу).

Решения.

Младшая лига

1. Рыцарь был обязан назваться рыцарем, так что второй рыцарь. Лжец не назвал бы себя лжецом, так что первый политик, а третий тогда лжец.

2. Можно. Сначала переливаем все из первой банки в остальные до краев. Затем половину второй банки в первую, половину третьей банки в первую, половину третьей банки во вторую. В первой и второй банке смеси одинаковые. Доливаем их в третью так, чтобы во всех трех стало поровну. Теперь из четвертой банки доливаем в первые три. В них получена одинаковая смесь, разливаем из них в четвертую.

3. Будем назвать строку красной или синей в зависимости от того, каких клеток в ней больше. Аналогично со столбцами. Не умаляя общности, красных столбцов больше половины. Если при этом существует красная строчка, то в ее пересечении с красными столбцами должна быть красная клетка (иначе строчка была бы синяя). Эта клетка нам подходит. Если же все строчки синие, то всего синих клеток больше, чем красных, значит есть синий столбец, любая его синяя клетка нам опять же подходит.

4. Ясно, что простые числа, большие 5 и отличающиеся на 2, имеют вид $6k \pm 1$ (перебор возможных остатков при делении 6). Заметим, что число $6k+1$ просто если и только его нельзя представить в виде $(6u \pm 1)(6v \pm 1)$, а число $6k-1$ — если его нельзя представить в виде $(6u+1)(6v-1)$. Таким образом, число k не представимо в указанном виде если и только если числа $6k \pm 1$ простые.

5. Из вписанности четырехугольников $ADEC$, $BDFC$ получаем $\angle DEB = \angle CAD$, $\angle AFD = \angle DBC$. Значит, треугольники AFD и EDB равны по стороне и двум углам, $FD = DB$, углы $\angle FCD$ и $\angle BCD$ равны как опирающиеся на равные хорды.

6. *Ответ:* Все, кроме степеней 2.
Во-первых рассмотрим число, не являющееся степенью двойки, $n = 2^p(2q+1)$, $q > 0$. Имеем $n = 2^p + 2^p q + 2^p q = [1, 2^p] + [1, 2^p q] + [2^p, 2^p q]$. Теперь докажем, что степень 2 не представить в таком виде. Если $x = 2^a u$, $y = 2^b v$, $z = 2^c w$, $a \leqslant b \leqslant c$, u, v, w нечетны, то $[x,y] + [y,z] + [z,x] = 2^b([u,v] + 2^{c-b}([v,w] + [u,w]))$. Выражение в скобках нечетно и больше 1, так что все произведение не может быть степенью 2.

7. Пусть точка M симметрична K относительно центра O параллелограмма. Имеем $OD/DM = OB/BK = OC/CL$, откуда по теореме Фалеса $DC \| ML$. Отсюда $\angle MLD = \angle LDC = \angle DCO - \angle CLD = \angle DCB - \angle DLK = \angle DLK$. Пусть отрезки LD и CM пересекаются в точке P. Тогда $PD/PL = DC/LM = OD/OM = OD/OK$, откуда $OP \| KL$. Если MC пересекает LK в точке N, то получается, что OP — средняя линия треугольника MKN, то есть $NP = PM$ и в треугольнике MLN отрезок CP является медианой и биссектрисой. Значит, он является и высотой, то есть $MC \perp LD$. Осталось заметить, что $MC \| AK$ из симметрии.

8. *Ответ:* 51 компания.
Заметим, что если компаний не больше 50, то одна из них содержит не менее 101 рейса, в таком случае имеется циклический маршрут. Пример. Можно считать, что аэропорты расположены в вершинах правильного 101-угольника и один из них — главный. Пусть одна из компаний обслуживает все рейсы из главного аэропорта, а каждая из других — рейсы между неглавными аэропортами на данном расстоянии (своем для каждой авиакомпании).

9. Перепишем неравенство в виде $(x+y+z)((x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2)/2 \geqslant 4(x-y)(y-z)(z-x)$. Заметим, что если одновременно уменьшать x, y, z на одну и ту же величину, правая часть не меняется, а левая уменьшается. Таким образом, можно доказывать неравенство в случае, когда одна из переменных равна 0. Пусть скажем $z = 0$, тогда надо доказать, что $x^3 + y^3 \geqslant 4xy(y-x)$. Имеем $x^3 + y^3 = x^3 + y(y-2x)^2 + 4xy(y-x) \geqslant 4xy(y-x)$.

Старшая лига

1. Обозначим треугольник ABC, точку на его стороне AB — M, проекции M на стороны AC и BC — L и K соответственно. Пусть высоты из вершин B и A пересекают отрезки MK и ML соответственно в точках P и Q. Легко видеть, что $MQ/ML = MP/MK = 2/3$. Рассмотрим прямые, проходящие через K параллельно ML и через L параллельно MK. Они пересекаются в такой точке N, что $MKNL$ — параллелограмм. При гомотетии с центром M и коэффициентом $2/3$ эти прямые переходят в высоты треугольника, так что центр O треугольника лежит на отрезке MN (и делит его в отношении $2:1$), откуда вытекает требуемое.

2. Ясно, что простые числа, большие 5 и отличающиеся на 2, имеют вид $6k \pm 1$ (перебор возможных остатков при делении 6). Заметим, что число $6k+1$ просто если и только его нельзя представить в виде $(6u \pm 1)(6v \pm 1)$, а число $6k-1$ — если его нельзя представить в виде $(6u+1)(6v-1)$. Таким образом, число k не представимо в указанном виде если и только если числа $6k \pm 1$ простые.

3. Легко видеть, что плоскость пересекает каждый кубик либо по вершине, либо по трем вершинам, образующим правильный треугольник со стороной $\sqrt{2}$. Таким образом, *ответ:* площади всех кусков равны $\sqrt{3}/2$.

4. *Ответ:* 50. *Пример.* Разделим квадрат на четыре квадрата со стороной 50, в двух противоположных расставим нули, в одном единицы, в другом минус единицы.

Докажем, что больше быть не может. Предположим, что в каждой строке и в каждом столбце сумма больше 50 по модулю. Пусть имеется $50+x$ столбцов с положительной суммой и $50-x$ — с отрицательной ($-49 \leqslant x \leqslant 49$). Заметим, что тогда сумма в «положительных» столбцах больше, чем $50(50+x)$, а в «отрицательных» — меньше, чем $-50(50-x)$. С другой стороны, эти две суммы суть противоположные числа, так что в любом случае получаем, что сумма в положительных столбцах больше, чем $50(50+|x|)$. Аналогично, если положительных строк $50+y$, то сумма чисел в них больше, чем $50(50+|y|)$. Обозначим через A, B, C суммы чисел в клетках на пересечении положительных столбцов и положительных строк; положительных столбцов и отрицательных строк; отрицательных столбцов и отрицательных строк. Имеем $A+B > 50(50+|x|)$, $B+C < -50(50+|y|)$. Вычитая, получаем $A-C \geqslant 50(100+|x|+|y|)$. С другой стороны, ясно, что $A-C \leqslant (50+x)(50+y)+(50-x)(50-y) = 5000+2xy$. Отсюда $2|xy| \geqslant 2xy > 50(|x|+|y|)$, $(|x|-25)(|y|-25) > 25^2$, что очевидно невозможно. Противоречие.

5. Можно синусами посчитать.

6. *Ответ:* $f(x) = cx$.

Подставим $y=0$, получим $f(x^3) = x^2 f(x)$. Значит, $f(x^3+y^3) = f(x^3)+f(y^3)$, в силу произвольности чисел x, y получаем $f(a+b) = f(a)+f(b)$. Далее, рассмотрим вместо функции $f(x)$ функцию $g(x) = f(x) - f(1)\cdot x$. Легко видеть, что g также удовлетворяет условию и $g(1) = 0$. Имеем $g(x^3)+3g(x^2)+3g(x)+g(1) = g((x+1)^3) = (x+1)^2 g(x+1) = (x^2+2x+1)g(x) = g(x^3)+2xg(x)+g(x)$. Отсюда $3g(x^2) = 2xg(x) - 2g(x)$. Подставляя в последнее равенство $-x$ вместо x (заметим, что $g(-x) = -g(x)$ из условия $g(x)+g(-x) = g(0) = g(0+0) = 2g(0) = 0$) и приравнивая, получаем $g(x) = 0$.

7. Пусть сначала они разобьются на (разнополые) пары как попало, лишь бы каждый кадет не танцевал со своей сестрой. Затем если сестры двух кадетов А, Б танцуют с друзьями В, Г соответственно (назовем это событие неприятностью), можно поменять партнершу у В и еще какого-то кадета Х так, чтобы неприятность исчезла и не возникло новых неприятностей. Это следует из того, что возможных запретов имеется не более 202 штук (2 запрета — танцевать со своей сестрой и не более чем $2\cdot 10^2$ запретов на возможные неприятности). Так мы последовательно устраним все неприятности.

8. Перепишем неравенство в виде
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac} - 1 \geqslant \frac{1}{3} - \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3(a^3+b^3+c^3)}.$$
Не умаляя общности, c есть наименьшее из чисел a, b, c, так что $(a-c)(b-c) > 0$. Левая часть равна
$$\frac{(a-b)^2+(a-c)(b-c)}{ab+bc+ac},$$
правая же
$$\frac{(a-b)^2(a+b)+(a-c)(b-c)(b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)}.$$
Следовательно, достаточно проверить неравенства
$$\frac{1}{ab+bc+ac} \geqslant \frac{a+b}{3(a^3+b^3+c^3)}, \quad \frac{1}{ab+bc+ac} \geqslant \frac{c+b}{3(a^3+b^3+c^3)}.$$
Оба вытекают из простого неравенства $3(a^3+b^3+c^3) \geqslant (a+b+c)(ab+bc+ac)$ (разность правой и левой частей равна $(a+b)(a-b)^2+(c+b)(c-b)^2+(a+c)(a-c)^2+(a^3+b^3+c^3-3abc) \geqslant 0$).

9. Из соображений «непрерывности» несложно найти три прямые, проходящие через одну точку, которые делят плоскость на 6 углов, каждый из которых содержит k наших. Такая точка содержится в $2k^3$ треугольниках, вершины которых выбираются в трех попарно несоседних углах. Кроме того, для любой пары точек, взятых в вертикальных углах, годится еще хотя бы $2k$ треугольников со взятыми вершинами. Итого получается $2k^3 + 3\cdot k^2\cdot 2k = 8k^3$ треугольников.

Регата. Решения

Младшая лига

Первый тур

1.1. В ряд выписано пять неотрицательных чисел. Сумма любых двух соседних не превосходит 1. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех пяти чисел?

1.2. В треугольнике ABC с углом BAC, равным $24°$, на сторонах AB и AC взяты точки X и Y соответственно. При этом окружность с центром в Y, проходящая через A, проходит также через X, а окружность с центром в X, проходящая через B, проходит также через C и Y. Найдите $\angle ABC$.

1.3. Сколькими способами можно расположить на полке подряд шесть книг: два тома Достоевского, два тома Гоголя и два тома Тургенева, если Достоевского нельзя ставить по соседству с Тургеневым? (Все тома разные.)

Второй тур

2.1. Даны вещественные числа a, b, c такие, что $a+b+c=0$. Найдите

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)$$

2.2. AL, BM, CN — медианы треугольника ABC, пересекающиеся в точке K. Известно, что четырехугольник $CLKM$ является вписанным, а $AB=2$. Найдите длину медианы CN.

2.3. Можно ли на клетчатой плоскости так расположить конечное число ферзей, чтобы каждый ферзь бился ровно 4 другими (ферзи не прозрачны)?

Третий тур

3.1. Найдите все натуральные числа n такие, что наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$ не кратно ни одному из чисел $n+1$, $n+2$, $n+3$.

3.2. Можно ли разбить равнобедренный прямоугольный треугольник на 6 разных равнобедренных прямоугольных треугольников?

3.3. В Северной Венеции прошли выборы мэра, в которых участвовали все жители города. Победивший кандидат получил на выборах более половины голосов, причем за него проголосовало 96% политически неграмотного населения и 4% политически грамотного населения. Докажите, что если бы 40% грамотного населения не пришли на выборы, то этот кандидат собрал бы более 60% голосов (от числа пришедших).

Четвёртый тур

4.1. Вещественные числа a, b, c, d, e, f, g удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} a+4b+9c+16d+25e+36f+49g=1 \\ 4a+9b+16c+25d+36e+49f+64g=12 \\ 9a+16b+25c+36d+49e+64f+81f=123 \end{cases}$$

Найдите $16a+25b+36c+49d+64e+81f+100g$.

4.2. Пусть E — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что периметры треугольников ABE, BCE, CDE, DAE одинаковы, а радиусы вписанных окружностей треугольников ABE, BCE, CDE равны 3, 4, 6 соответственно. Найдите радиус вписанной окружности треугольника DAE.

4.3. u — слово (*словом* называется любая конечная последовательность букв), x, y, z — буквы. Известно, что слово $xyzu$ начинается словом u. Докажите, что слово u состоит только из букв x, y, z.

Старшая лига

Первый тур

1.1. Числа x, y, $z>1$ и $w>0$ таковы, что $x^{24}=w$, $y^{40}=w$, $(xyz)^{12}=w$. Найдите все α, такие что $z^{\alpha}=w$.

1.2. AB — диаметр единичной окружности с центром в точке O. C и D — такие точки на окружности, что AC и BD пересекаются внутри окружности в точке Q и $\angle AQB=2\angle COD$. Найдите расстояние от O до прямой CD.

1.3. В лаборатории социальной справедливости работает 15 сотрудников. Заведующий лаборатории каждый месяц повышает зарплату на 1 доллар 13 из них по своему усмотрению. Может ли он уравнять зарплаты вне зависимости от их начального уровня? (Зарплаты всегда выражаются целым числом долларов.)

Второй тур

2.1. Решите в вещественных числах систему уравнений

$$\begin{cases} \{a\} + [b] + \{c\} = 2.9; \\ \{b\} + [c] + \{a\} = 5.3; \\ \{c\} + [a] + \{b\} = 4.0. \end{cases}$$

2.2. Описанная окружность треугольника ABC фиксирована. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC.

2.3. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости так расположить ферзей, чтобы каждый ферзь бился ровно 7 другими (ферзи не прозрачны)?

Третий тур

3.1. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x$$

с вещественными x, y, z?

3.2. Радиус описанной окружности треугольника равен 2, а длины всех высот являются целыми числами. Найдите стороны треугольника.

3.3. Назовем *фигурой* объединение единичных квадратов, не имеющих общих сторон, а *вершинами фигуры* — вершины этих квадратов. $F(M)$ — объединение образов фигуры M при центральных симметриях относительно всех вершин фигуры M. Найти площадь фигуры $F(F(\ldots F(M)\ldots))$ (F повторяется 2010 раз), где M — единичный квадрат.

Четвёртый тур

4.1. Число 3^{2009} представлено в виде суммы k последовательных натуральных чисел. Чему равно наибольшее возможное значение k?

4.2. B_1 — середина стороны AC треугольника ABC, C_1 — середина стороны AB треугольника ABC. Описанные окружности треугольников ABB_1 и ACC_1 пересекаются в точке P. Прямая AP пересекает описанную окружность треугольника AB_1C_1 в точке Q. Найдите $\dfrac{AP}{AQ}$.

4.3. $P(x)$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами, а многочлен $Q(x) = \sqrt{P(x)}$. Может ли оказаться, что среди коэффициентов $Q(x)$ будут как положительные, так и отрицательные числа?

Решения.

Младшая лига

Первый тур

1.1. *Ответ:* 3. *Пример:* 1, 0, 1, 0, 1.
Обозначая наши числа a, b, c, d, e получаем, что $a + b + c + d + e = (a + b) + (c + d) + (d + e) - d \leqslant 3$.

1.2. *Ответ:* 54°.
Заметим, что $AY = XY$, так как X лежит на окружности с центром в Y, проходящей через A. (см. рис. 9).
Тогда $\triangle AYX$ является равнобедренным, и $\angle AXY = \angle XAY = 24^\circ$. Поскольку $\angle XYC$ — внешний для треугольника AXY, то $\angle XYC = \angle AXY + \angle XAY = 48^\circ$. Точки Y, C, B лежат на окружности с центром в X, поэтому $XY = XC = XB$, треугольники YXC и BXC являются равнобедренными. Значит, $\angle XCY = \angle XYC = 48^\circ$, $\angle XCB = \angle ABC$. Сумма углов в треугольнике ABC должна быть равна 180°, поэтому $180^\circ = \angle BAC + \angle XCY + \angle XCB + \angle ABC = 24^\circ + 48^\circ + 2\angle ABC$. Отсюда получаем, что $2\angle ABC = 180^\circ - 24^\circ - 48^\circ = 108^\circ$, тем самым $\angle ABC = 54^\circ$.

1.3. *Ответ:* 96.
Решим сначала задачу в случае, если тома одного писателя не различаются. Возникают 6 вариантов: ГДДГТТ, ДГДГТТ, ДДГГТТ, ДДГТГТ, ДДГТТГ, ДГТТГД; и еще шесть, которые возникают из них заменой Достоевского на Тургенева, всего 12. Чтобы получить решение исходной задачи, нужно умножить 12 на 8 (книги каждого писателя можно упорядочить двумя способами).

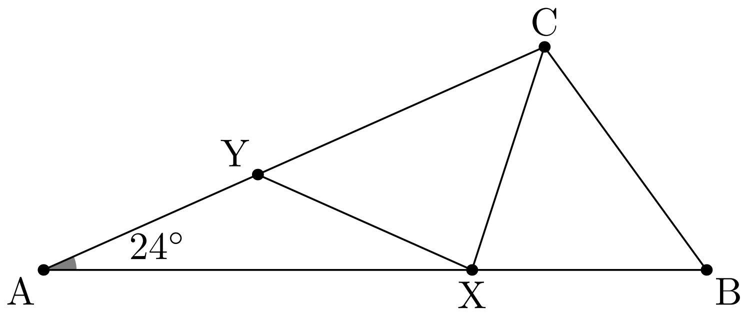


Рис. 9: к решению задачи 1.2

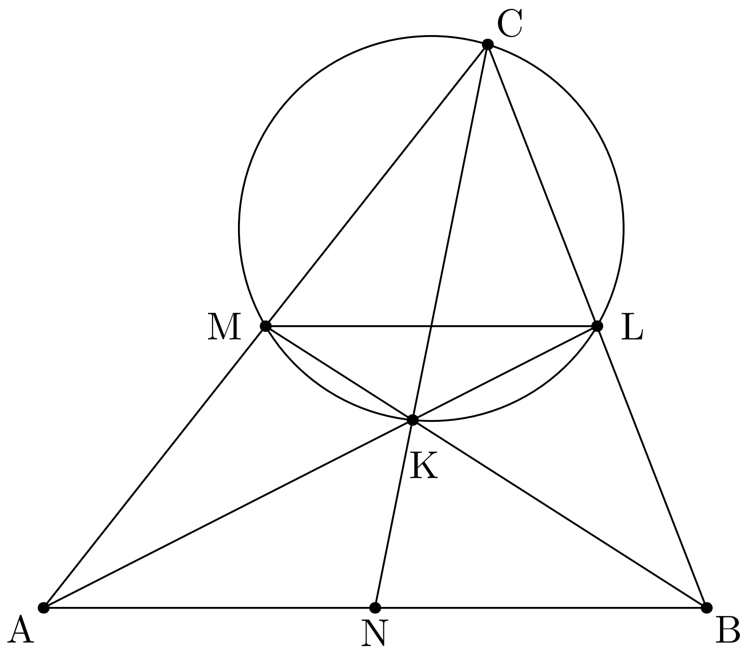


Рис. 10: к решению задачи 2.2

Второй тур

2.1. *Ответ:* 9.

Заметим, что для трех чисел x, y, z выполняется тождество

$$\frac{x-z}{y}+\frac{z-y}{x}+\frac{y-x}{z}=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}.$$

Применим его к набору $(x,y,z)=(b-c,c-a,a-b)$. Заметим, что $x-z=2b-a-c=3b$ и т.д., так что получится

$$\frac{3a}{b-c}+\frac{3b}{c-a}+\frac{3c}{a-b}=\frac{-27abc}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Отсюда находим, что первый сомножитель есть $-(9abc)((b-c)(c-a)(a-b))$, второй по тому же тождеству для набора $(x,y,z)=(a,b,c)$ равен $-(b-c)(c-a)(a-b)abc$. Осталось перемножить и сократить.

2.2. *Ответ:* $\sqrt{3}$.

Так как LM — средняя линия треугольника ABC, то $LM \parallel AB$. (см. рис. 10).

Значит, $\angle LMB = \angle ABM$. Из вписанности четырехугольника $CLKM$ получаем, что $\angle LMB = \angle LCN$. Тем самым, $\angle LCN = \angle ABM$, поэтому треугольники NBK и NCB подобны ($\angle BNC$ у них общий). Из подобия этих треугольников можем заключить, что $\frac{CN}{NB}=\frac{NB}{NK}$. Заметим теперь, что $NB=\frac{AB}{2}=1$, а $NK=\frac{CN}{3}$, так как центр масс делит медиану CN в отношении $2:1$. Таким образом, $\frac{CN^2}{3}=CN\cdot NK=NB^2=1$, $CN=\sqrt{3}$.

2.3. *Ответ:* Можно.

Например, так, как на рисунке 11.

Третий тур

3.1. *Ответ:* $n = 1$, 2, 6.

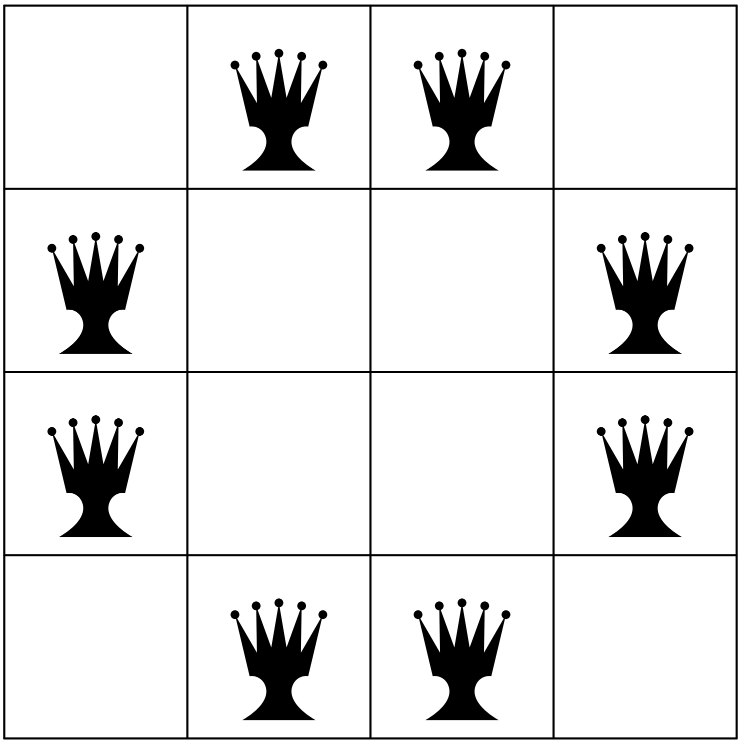


Рис. 11: к решению задачи 2.3

Легко видеть, что такие n подходят, а $n = 3$ не подходит. Пусть $n > 3$ и выполняется условие задачи. Заметим, что если одно из чисел $n+1$, $n+2$, $n+3$, назовем его x, не является степенью простого, то оно представимо как произведение двух меньших его взаимно простых множителей, каждый из которых не превосходит $(n+3)/2 < n$. В этом случае НОК чисел от 1 до n делится на x — противоречие. Если n нечетно, то числа $n+1$ и $n+3$ четны, но не могут быть оба степенями двойки. Если n четно, то $n+2$ должно быть степенью двойки, $n+2 = 2^k$. Если k четно, то $n+1 = 2^k - 1 = (2^{k/2}-1)(2^{k/2}+1)$ — произведение двух взаимно простых множителей, больших 1, противоречие. Если же k нечетно, то $n+3 = 2^k+1$ делится на 3, значит $2^k+1 = n+3 = 3^m$. Если m нечетно, то $2^k = 3^m - 1$ не делится на 4. Если m четно, то $2^k = 3^m - 1 = (3^{m/2}-1)(3^{m/2}+1)$, и значит выражения в скобках — отличающиеся на 2 степени двойки. Отсюда $m = 2$, $k = 3$, $n = 6$.

3.2. *Ответ:* можно.
Один из вариантов такого разбиения можно увидеть на рисунке. Для каждого треугольника показана его площадь. См. рис. 12.

3.3. Пусть x — количество политически грамотного населения, y — политически неграмотного. Тогда за Мэра проголосовало $x/25 + 24y/25 > (x+y)/2$, а если бы 40% грамотного населения не пришли бы на выборы, то проголосовало бы не менее $24y/25$ от населения, а общее число участников составило бы $3/5x + y$. Легко видеть, что из неравенства $x/25 + 24y/25 > (x+y)/2$ вытекает неравенство $24y/25 > 3/5x + y$.

Четвёртый тур

4.1. *Ответ:* $3 \cdot 123 - 3 \cdot 12 + 1 = 334$.
Заметим, что $(n+2)^2 - 3(n+1)^2 + 3n^2 - (n-1)^2 = 0$, так что $(16a+25b+36c+49d+64e+81f+100g) - 3(9a+16b+25c+36d+49e+64f+81f) + 3(4a+9b+16c+25d+36e+49f+64g) - (a+4b+9c+16d+25e+36f+49g) = 0$.

4.2. *Ответ:* $\frac{9}{2}$.
Пусть угол между диагоналями равен α. Тогда $S(ABE) = \frac{1}{2}AEBE\sin\alpha$, $S(BCE) = \frac{1}{2}BECE\sin\alpha$, $S(CDE) = \frac{1}{2}CEDE\sin\alpha$, $S(DAE) = \frac{1}{2}DEAE\sin\alpha$. Заметим, что из приведенных выше формул следует, что $S(ABE)S(CDE) = S(BCE)S(DAE)$. Кроме того, мы знаем, что $S = \frac{pr}{2}$, где r — радиус вписанной окружности, а p — периметр треугольника. Воспользовавшись этой формулой, получаем, что

$$r(ABE)p(ABE)r(CDE)p(CDE) = r(BCE)p(BCE)r(DAE)p(DAE)$$

По условию задачи все периметры треугольников равны, поэтому $r(ABE)r(CDE) = r(BCE)r(DAE)$ и $r(DAE) = \frac{r(ABE)r(CDE)}{r(BCE)}$ $\frac{9}{2}$.

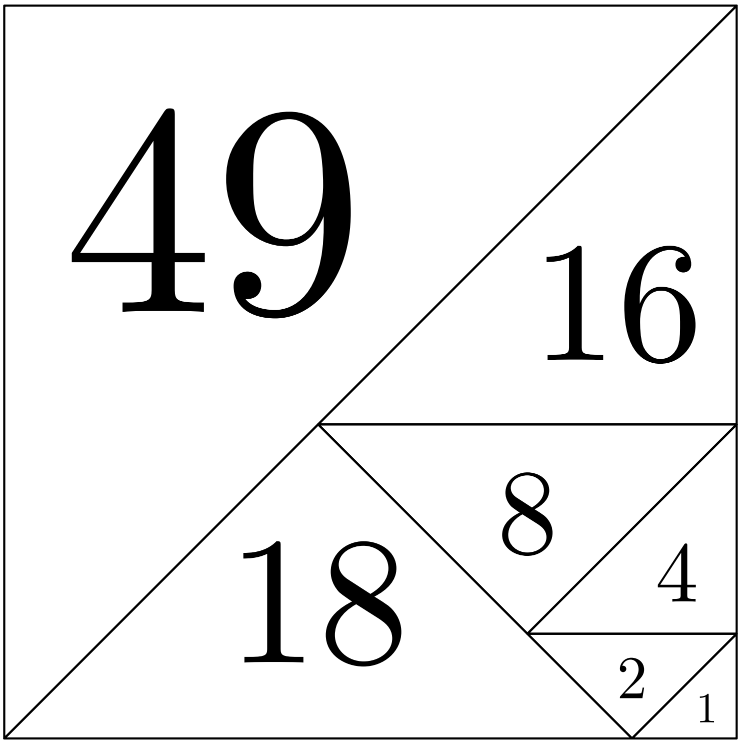


Рис. 12: к решению задачи 3.2

4.3. Пусть $s = xyz$. Тогда su начинается на u и, следовательно, ssu начинается на su, более того, $s^{k+1}u$ начинается на $s^k u$ при любом k. Следовательно, $s^k u$ при любом k (в том числе сколь угодно большом) начинается на $s^{k-1}u$, начинается на $s^{k-2}u, \ldots$, начинается на u. Значит, слово u состоит из тех же букв, что и слово s.

Старшая лига

Первый тур

1.1. *Ответ:* 60.
Имеем $z = (xyz)/(xy) = w^{1/12} \cdot w^{-1/24} \cdot w^{-1/40} = w^{1/60}$.

1.2. *Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
См. рис. 13. $\angle AQB = \frac{\breve{AB}+\breve{CD}}{2} = 90^\circ + \frac{\angle COD}{2}$. По условию задачи $\angle AQB = 2\angle COD$, поэтому $90^\circ + \frac{\angle COD}{2} = 2\angle COD$ и $\angle COD = 60^\circ$. Тогда $\triangle COD$ — правильный треугольник со стороной 1, а расстояние от O до CD равно его высоте, то есть $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.3. *Ответ:* Может.
С точки зрения множества попарных разностей зарплат, поднять зарплату 13 сотрудникам на 1$ то же, что опустить двум на ту же сумму. В свою очередь, опустить $6 \cdot 2 = 12$ сотрудникам на 1$ (с точки зрения множества попарных разностей зарплат) значит то же, что и поднять оставшемуся сотруднику зарплату на 1$. А такой операцией уравнять зарплаты несложно.

Второй тур

2.1. *Ответ:* $a = 3.1$, $b = 2.2$, $c = 5.8$ или $a = 3.6$, $b = 2.7$, $c = 4.3$.
Из третьего равенства получаем, что либо $\{b\} = \{c\} = 0$, но тогда первые два равенства дают противоречивые равенства $\{a\} = 0.9 = 0.3$, либо $\{c\} + \{b\} = 1$, $[a] = 3$. Складывая первые два равенства, получаем, что $\{a\} = 0.6$ или $\{a\} = 0.1$. В первом случае получаем $\{b\} = 0.7$, $\{c\} = 0.3$, откуда легко получаем $a = 3.6$, $b = 2.7$, $c = 4.3$. Во втором случае $\{b\} = 0.2$, $\{c\} = 0.8$, $a = 3.1$, $b = 2.2$, $c = 5.8$.

2.2. *Ответ:* все внутренние точки окружности ω.
Поскольку точка пересечения медиан лежит внутри треугольника, то она лежит и внутри его описанной окружности. Значит, нам осталось показать, что любая точка внутри окружности является точкой пересечения медиан какого-то треугольника с вершинами на этой окружности.

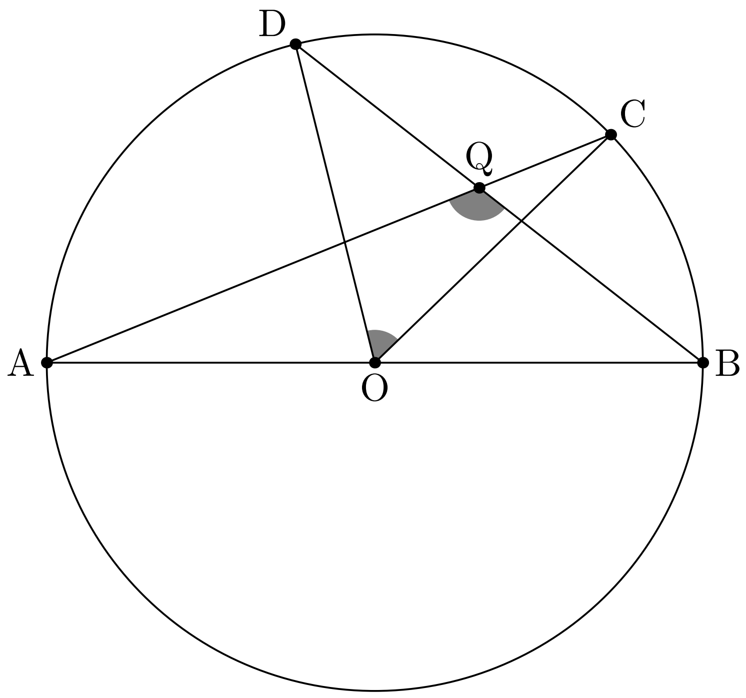


Рис. 13: к решению задачи 1.2

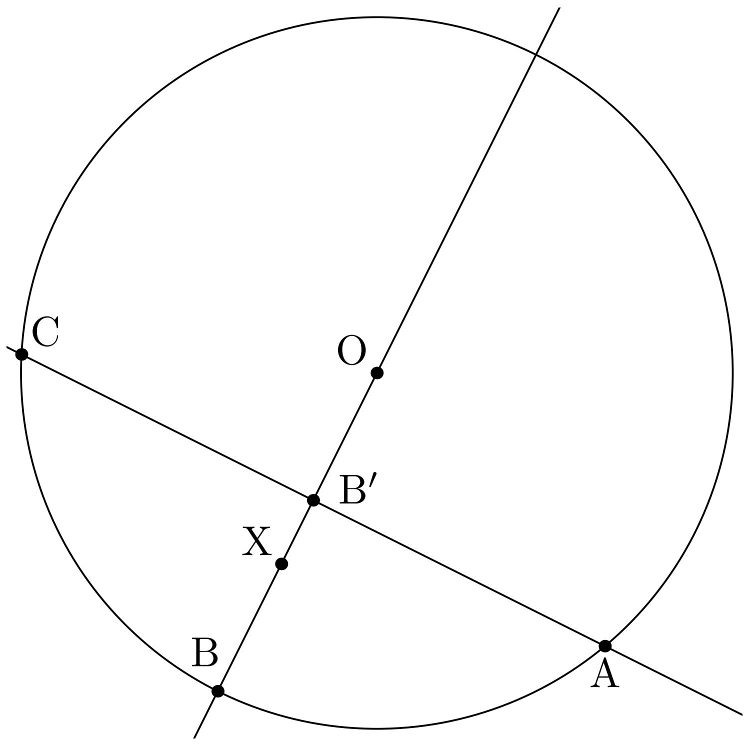
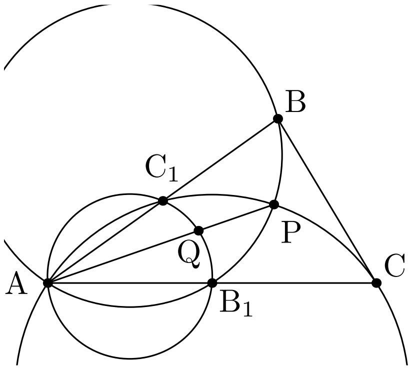


Рис. 14: к решению задачи 2.2



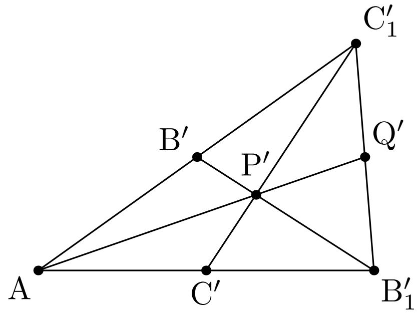


Рис. 15: к решению задачи 4.2

Пусть O — центр ω. Рассмотрим произвольную точку X внутри ω. (см. рис. 14).
В случае, если X совпадает с O подойдет правильный треугольник, вписанный в окружность. Если же эти две точки не совпадают, возьмем точку пересечения луча OX с окружностью в качестве точки B. Теперь отложим на луче XO отрезок BB' длиной $\frac{BX}{2}$ и проведем через B' прямую, перпендикулярную OX. Две точки пересечения этой прямой возьмем в качестве A и C. Очевидно, X будет точкой пересечения медиан построенного нами треугольника ABC.

2.3. *Ответ:* Можно.
Будем ставить очередного ферзя так, чтобы он бил только одного из ранее поставленных, при чем по свободным направлениям. Поставим первого ферзя, обслужим 7 его направлений. Обслужим их 7 ферзями. Все их линии боя будут различны и обслужена — только одна. Остается $6 \cdot 7$ направлений, которые обслуживаем 42 ферзями и т.д.

Третий тур

3.1. *Ответ:* $-3/2$, $3/2$, достигается при $x = y = z = \frac{\pi}{4}$.
Для получения оценки сложим неравенства типа $\sin x \cos y \leqslant (\sin^2 x + \cos^2 y)/2$.

3.2. *Ответ:* $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$.
Заметим, во-первых, что высота треугольника должна быть меньше диаметра описанной окружности, тем самым все высоты имеют длину 1, 2 или 3.
Из неравенства треугольника $a < b + c$ получаем, что $\dfrac{2S}{h_a} < \dfrac{2S}{h_b} + \dfrac{2S}{h_c}$ или $\dfrac{1}{h_a} < \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$. Если все три высоты имеют разные длины (то есть 1, 2 и 3), то $\dfrac{1}{1} > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$, что противоречит приведенному нами неравенству. Таким образом, среди высот найдутся пары равных, значит, треугольник равнобедренный. Рассмотрим высоту h при вершине равнобедренного треугольника. По теореме Пифагора основание будет равно $2\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = 2\sqrt{4h - h^2}$. В зависимости от h возможны три варианта:
$h = 1$. Нетрудно убедиться, что это треугольник с углами $120°$, $30°$, $30°$ и боковой стороной, равной 2. Высота, опущенная на боковую сторону равна $\sqrt{3}$ — не целое число.
$h = 2$. Это треугольник с углами $90°$, $45°$, $45°$ и боковой стороной, равной $2\sqrt{2}$, высота к боковой стороне также равна $2\sqrt{2}$ — не целое число.
$h = 3$. Это правильный треугольник со стороной $2\sqrt{3}$, все его высоты равны 3, то есть он подходит под условие задачи.

3.3. *Ответ:* $(3^{2010} + 1)/2$.
Легко видеть, что на k-м шаге фигура представляет собой множество черных клеток квадрата $3^k \times 3^k$, раскрашенного в шахматном порядке (центральная клетка — черная). Их количество равно $(3^k + 1)/2$.

Четвёртый тур

4.1. *Ответ:* $2 \cdot 3^{1004}$.
Пусть $3^{2009} = (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+k) = ka + k(k+1)/2$. Тогда $2 \cdot 3^{2009} = k(k + 2a + 1)$, первый сомножитель меньше второго. Отсюда $k < \sqrt{2 \cdot 3^{2009}} = \sqrt{6} \cdot 3^{1004}$. Наибольший делитель числа $2 \cdot 3^{2009}$ с таким свойством это $2 \cdot 3^{1004}$.

4.2. *Ответ:* $\frac{3}{2}$.
Рассмотрим инверсию с центром в точке A и произвольным радиусом. (см. рис. 15).

Штрихами будем обозначать образы точек после инверсии. Тогда B' — середина отрезка AC_1', C' — середина отрезка AB_1'. Образом описанной окружности $\triangle ABB_1$ будет прямая $B'B_1'$, образом описанной окружности $\triangle ACC_1$ будет прямая $C'C_1'$. Поскольку эти прямые являются медианами треугольника $AB_1'C_1'$, то их пересечение P' будет центром тяжести этого треугольника. Так как образом описанной окружности $\triangle AB_1C_1$ будет прямая $B_1'C_1'$, то Q' — точка пересечения AP' с отрезком $B_1'C_1'$, а, значит, является серединой этого отрезка. Центр тяжести делит медиану в отношении $1:2$, поэтому $\frac{AP}{AQ} = \frac{AQ'}{AP'} = \frac{3}{2}$.

4.3. *Ответ:* Могут.

Вначале построим многочлен Q, по нему строится $P = Q^2$. Положим $Q(x) = 1 + x - 1/10x^2 + x^3 + x^4$. Тогда $P(x) = Q(x)^2 = 1 + 2x + 0.8x^2 + 1.8x^3 + 2.01x^4 + 1.8x^5 + 0.8x^6 + 2x^7 + x^8$.