Zadatak 1. Neka je n zbir prirodnih brojeva a_1, a_2, $\ldots$, a_k i neka je $\binom{n}{a_1,\ldots,a_k}$ multinomijalni koeficijent $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(a_i!)}$.

Ako je $d = \mathrm{NZD}(a_1,\ldots,a_k)$ najveći zajednički delilac brojeva a_1, a_2, $\ldots$, a_k, dokazati da je $\dfrac{d}{n}\binom{n}{a_1,\ldots,a_k}$ ceo broj.

Zadatak 2. Neka je S skup tačaka prostora sa celobrojnim koordinatama (x,y,z), takav da je $1 \leqslant x,y,z \leqslant n$ i da su sva rastojanja tačaka iz S različita. Dokazati da je broj tačaka u S manji od

$$\min\left\{(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}},\ n\sqrt{6}\right\}.$$

Zadatak 3. Date su četiri tačke A_1, A_2, A_3, A_4 u ravni, od kojih nikoje tri nisu kolinearne, tako da je

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3.$$

Označimo sa O_i centar opisane kružnice trougla $\Delta A_jA_kA_\ell$, gde je $\{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\}$.

Ako je $A_i \neq O_i$ za sve indekse i, dokazati da se prave A_iO_i, $i = 1,2,3,4$, seku u jednoj tački ili su paralelne.

Zadatak 4. Za konačan skup X prirodnih brojeva označimo

$$\Sigma(X) = \sum_{x\in X} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Ako je S konačan skup prirodnih brojeva takav da je $\Sigma(S) < \frac{\pi}{2}$, dokazati da postoji bar jedan konačan skup T prirodnih brojeva za koji je

$$S \subset T \quad \text{i} \quad \Sigma(T) = \frac{\pi}{2}.$$

Svaki zadatak vredi 7 bodova.
Vreme rada: 5 sati.