30. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna (bazna) varijanta, 12. oktobar 2008. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) U 10 kutija nalaze se olovke. Poznato je da u različiim kutijama ima različit broj olovaka, pri čemu su u svakoj kutiji olovke različitih boja. Dokažite da iz svake kutije možemo uzeti po olovku tako da sve one budu različitih boja.

2. (3 poena) Dato je 50 različitih prirodnih brojeva, od kojih 25 nisu veći od 50, a ostali su veći od 50, ali ne prelaze preko 100. Pri tome ni koja dva se ne razlikuju tačno za 50. Nađite zbir (svih) tih brojeva.

3. (4 poena) U kružnicu poluprečnika 2 upisan je oštrougli trougao $A_1A_2A_3$. Dokažite da se na lukovima A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 može naći po jedna tačka

B_1, B_2, B_3 (tim redom), tako da površina šestougla $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ bude brojčano jednaka obimu trougla $A_1A_2A_3$.

4. (4 poena) Data su tri prirodna broja takva da je jedan od njih jednak poluzbiru druga dva. Može li proizvod ta tri broja biti tačan 2008. stepen prirodnog broja?

5. (4 poena) Nekoliko sportista startovalo je istovremeno sa jednog kraja pravolinijske staze. NJihove brzine su različite, ali konstantne (stalne). Kad dođu do kraja staze sportisti se trenutno okreću i trče nazad, zatim sve to ponavljaju, itd. U jednom momentu su se svi sportisti našli u jednoj tački. Dokažite da će takvih susreta biti još.

30. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Pripremna (bazna) varijanta, 12. oktobar 2008. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Aljoša ima kolače raspoređene u nekoliko kutija. Aljoša je zapisao po koliko kolača ima u svakoj kutiji. Serjoža je uzeo po jedan kolač iz svake kutije i stavio na prvi tanjir. Zatim je ponovo uzeo po jedan kolač iz svake kutije koja nije prazna i stavio ih na drugi tanjir. Tako je radio sve dok svi kolači nisu bili raspoređene po tanjirima. Posle toga, Serjoža je zapisao po koliko je kolača bilo na svakom tanjiru. Dokažite da je količina različitih brojeva koje je Aljoša zapisao jednaka količini različitih brojeva koje je Serjoža zapisao.

2. (3 poena) Rešite sistem jednačina $(n>2)$

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2+\ldots+x_n}=\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3+\ldots+x_n+x_1}=\ldots=\sqrt{x_n}+\sqrt{x_1+\ldots+x_{n-1}};\quad x_1-x_2=1$$

3. (4 poena) U kružnicu poluprečnika 2 upisan je tridesetougao $A_1 A_2 \ldots A_{30}$. Dokažite da se na lukovima A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{30}A_1$ može naći po jedna tačka B_1,B_2,...,B_3 (tim redom), tako da površina šezdesetougla $A_1B_1A_2B_2\ldots A_{30}B_{30}$ bude brojčano jednaka obimu tridesetougla $A_1A_2\ldots A_{30}$.

4. (4 poena) Da li postoji aritmetička progresija od pet različitih prirodnih brojeva, čiji je proizvod jednak tačno 2008-om stepenu prirodnog broja?

5. (4 poena) Na kvadratnoj mreži nacrtano je nekoliko pravougaonika čije se stranice poklapaju sa linijama mreže. Svaki pravougaonik se sastoji iz neparnog broja polja (kvadratića) i nikoja dva pravougaonika nemaju zajedničkih polja. Dokažite da te pravougaonike možemo obojiti sa 4 boje tako da pravougaonici iste boje nemaju zajedničke granične tačke.

30. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Osnovna varijanta, 26. oktobar 2008. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Na šahovskoj tabli 100×100 raspoređeno je 100 dama koje ne tuku jedna drugu. Dokažite da se u svakom ugaonom kvadratu 50×50 nalazi bar jedna dama. (*Dama je šahovska figura koja se kreće po horizontali, vertikali i dijagonali - na bilo koje rastojanje*!)

2. (6 poena) Imamo 4 kamena, od kojih svaki važe ceo broj grama. Imamo terazije sa tasovima i strelicom koja pokazuje na kojem od dva tasa se nalazi veća masa i za koliko grama je ta masa veća. Može li se sa 4 merenja odrediti masa svakog kamena, ako se u jednom od tih merenja može pogrešiti za 1 gram? (*Masa kamena ne može biti* ni 0, *ni negativna*!)

3. (6 poena) Serjoža je nacrtao trougao *ABC* i njegovu težišnu duž *AD*. Zatim je svom drugu Ilji saopštio dužinu težišne duži *AD* i dužinu stranice *AC*. Na osnovu tih podtaka Ilja je dokazao tvrđenje: ugao *CAB* je tup, a ugao *DAB* je oštar. Nađite odnos $\frac{AD}{AC}$ (i dokažite Iljino tvrđenje za svaki trougao u kome važi takav odnos).

4. (6 poena) Baron Minhauzen je pričao da on ima kartu zemlje Oz na kojoj je prikazano 5 gradova. Svaka dva grada spojena su putem koji ne prolazi kroz druge gradove. Svaki put na karti seče najviše jedan od drugih puteva (i najviše na jednom mestu). Putevi su označeni žutom ili crvenom bojom (prema boji podloge na putu), a pri obilasku oko svakog grada (po obodu) boje puteva koji iz njega polaze, a na koje se pri takvom obilasku nailazi, menjaju se naizmenično. Može li Baron biti u pravu?

5. (8 poena) Dati su pozitivni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Zna se da je $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le \frac{1}{2}$.

Dokažite da je $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) < 2$.

6. (9 poena) Nad stranicama *AC* i *BC* raznostraničnog trougla *ABC* sa spoljašnje strane, kao nad osnovicama, konstruisani su jednakokraki trouglovi *AB'C* i *CA'B* sa jednakim uglovima na osnovicama. Svaki od tih uglova je φ. Normala iz temena *C* povučena na duž *A'B'* seče simetralu duž *AB* u tački C_1. Odredite ugao AC_1B.

7. U beskonačnom nizu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ broj a_1 jednak je 1, a svaki sedeći broj a_n nastaje iz prethodnog broja a_{n-1} po pravilu: ako najveći neparni delilac broja *n* ima ostatak 1 pri deljenju sa 4, tada je $a_n = a_{n-1} + 1$, a ako ima ostatak 3, tada je $a_n = a_{n-1} - 1$. Dokažite da se u tom nizu:

a) (5 poena) broj 1 pojavljuje beskonačno mnogo puta;

b) (5 poena) svaki prirodan broj javlja beskonačno mnogo puta.

(Evo nekoliko prvih članova tog niza: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, . . .)

(*Najveći neparni delilac broja n je najveći neparni broj kojim je broj n deljiv, pri čemu to ne mora biti prost delilac.*)

30. TURNIR GRADOVA
Jesenje kolo.
Osnovna varijanta, 26. oktobar 2008. god.
10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Kvadratna tabla podeljena je pravama koje su paralelne stranicama table na 64 pravougaona polja koja su zatim obojena kao šahovska tabla. Rastojanja među pravama ne moraju biti jednaka, pa zato polja mogu biti različitih dimenzija. Poznato je, međutim, da odnos površine ma kojeg belog polja prema površini ma kojeg crnog polja nije veći od 2. Nađite najveći mogući odnos zbira površina belih polja prema zbiru površina crnih polja.
(*Ako uzmemo da je jedna stranica table vertikalna, a druga horizontalna, onda povučenih 7 vertikalnih i 7 horizontalnih pravih dele tablu na 64 pravougaona polja*)

2. (6 poena) Prostor je razdeljen na jednake kocke. Da li je tačno da je za svaku od tih kocki uvek moguće naći drugu koja sa njom ima zajedničku stranu?

3. (6 poena) Na stolu se nalazi N > 2 gomilica oraha sa bar jednim orahom svakoj od njih.. Dvoje igraju ("vuku poteze") naizmenično. U jednom potezu treba uzeti dve gomilice u kojima su brojevi oraha uzajamno prosti, a zatim od njih ih napraviti jednu gomilicu. Pobeđuje onaj koji učini poslednji potez. Za svako N objasnite koji od igrača može uvek da pobedi, ma kako igrao njegov protivnik.

4. (6 poena) Dat je nejednakokraki trapez $ABCD$. Tačka A_1 je tačka preseka kružnice opisane oko trougla BCD i prave AC (A_1 je različito od C.) Analogno određujemo tačke B_1, C_1, D_1. Dokažite da je $A_1B_1C_1D_1$ takođe trapez. (*Trapez je figura kod koje su dve stranice paralelne, a dve ne*!)

5. (8 poena) U beskonačnom nizu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ broj a_1 jednak je 1, a svaki sedeći broj a_n nastaje iz prethodnog broja a_{n-1} po pravilu: ako najveći neparni delilac broja n ima ostatak 1 pri deljenju sa 4, tada je $a_n = a_{n-1} + 1$, a ako ima ostatak 3, tada je $a_n = a_{n-1} - 1$. Dokažite da se u tom nizu svaki prirodan broj javlja beskonačno mnogo puta.
(Evo nekoliko prvih članova tog niza: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, . . .)
(*Najveći neparni delilac broja n je najveći neparni broj kojim je broj n deljiv, (pri čemu to ne mora biti prost delilac.*)

6. (9 poena) Polinom $P(x)$ sa realnim koeficijentima je takav da jednačina $P(m) + P(n) = 0$ ima beskonačno mnogo rešenja za cele brojeve m i n. Dokažite da grafik funkcije $y = P(x)$ ima centar simetrije.

7. Test se sastoji iz 30 pitanja. Na svako pitanje postoje dve varijante odgovora (jedan tačan, a drugi netačan). U jednom pokušaju Vita odgovora na sva pitanja, posle čega mu saopštavaju na koliko pitanja je odgovorio tačno. Može li Vita da postupa tako da garantovano sazna na koja je pitanja tačno odgovorio, najkasnije

a) (5 poena) posle 29. pokušaja (i da odgovori tačno na sva pitanja u 30. pokušaju);

b) (5 poena) posle 24. pokušaja (i da odgovori tačno na sva pitanja u 25. pokušaju)?

(U početku Vita ne zna ni jedan odgovor, a test je stalno jedan te isti)