30. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 1. mart 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) U konveksnom 2009 - uglu povučene su sve dijagonale. Prava seče 2009- ugao, ali ne prolazi ni kroz jedno njegovo teme. Dokažite da ta prava seče paran broj dijagonala.

2. (4 poena) Neka $a*b$ znači izraz a^b. U izrazu $7*7*7*7*7*7*7$ treba staviti zagrade koje će određivati redosled operacija (ukupno 5 parova zagrada). Mogu li se te zagrade postaviti na dva različita načina, ali tako da se dobije isti rezultat?

3. (4 poena) Vlada hoće da napravi kolekciju kocki istih dimenzija i na svakoj strani svake kocke da napiše po jednu cifru, tako da se te kocke mogu poređati da čine ma koji 30- cifreni broj. Koliko najmanje kocki mu je za to dovoljno? (Cifre 6 i 9 se pri obrtanju kocke ne pretvaraju jedna u drugu.)

4. (4 poena) Prirodan broj su uvećali za 10% i ponovo dobili prirodan broj. Da li se pri tome zbir cifara mogao umanjiti za 10%?

5. (5 poena) U rombu *ABCD* ugao *A* iznosi 120°. Na stranicama *BC* i *CD* uzete su tačke *M* i *N* tako da je $\angle NAM$=30°. Dokažite da se centar kružnice opisane oko trougla *NAM* nalazi na dijagonali romba.

30. TURNIR GRADOVA

Prolćno kolo.

Bazna varijanta, 1. mart 2009. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

1. (3 poena) Neka $a*b$ znači izraz a^b. U izrazu $7*7*7*7*7*7*7$ treba staviti zagrade koje će određivati redosled operacija (ukupno 5 parova zagrada). Mogu li se te zagrade postaviti na dva različita načina, ali tako da se uvek dobije isti rezultat?

2. (4 poena) U ravni je dato nekoliko tačaka takvih da nikoje tri ne pripadaju istoj pravoj. Neke tačke spojene su dužima. Zna se da svaka prava koja ne prolazi kroz date tačke seče paran broj duži. Dokažite da iz svake tačke polazi paran broj duži.

3. Za svaki prirodan broj n označimo sa $O(n)$ njegov najveći neparni delilac. Dati su proizvoljni prirodni brojevi $x_1=a$ i $x_2=b$. Formirajmo beskonačni niz prirodnih brojeva po pravilu: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$, gde je $n = 3, 4, ...$

a) (2 poena) Dokažite da će, počev od nekog mesta, svi brojevi u nizu biti jednaki jednom istom broju.

b) (2 poena) Kako naći taj broj, ako se znaju brojevi a i b?

4. (4 poena) Redom je napisano nekoliko nula i jedinica. Posmatrajmo (sve) parove cifara u tom redu (ne obavezno susednih), gde je leva cifra 1, a desna 0. Neka se među tim parovima nalazi tačno M takvih u kojima između jedinice i nule ima paran broj cifara (moguće i nijedna), i tačno N takvih u kojima između jedinice i nule stoji neparan broj cifara. Dokažite da je $M \geq N$.

5. (4 poena) U unutrašnjosti nekog tetraedra uzeta je proizvoljna tačka X. Kroz svako teme tetraedra povučena je prava, paralelna duži koja spaja tačku X sa tačkom preseka medijana (težišnih duži) naspramne strane. Dokažite da se četiri dobijene prave seku u jednoj tački.

30. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 1. mart 2009. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Neka $a*b$ znači izraz a^b. U izrazu $7*7*7*7*7*7*7$ treba staviti zagrade koje će određivati redosled operacija (ukupno 5 parova zagrada). Mogu li se te zagrade postaviti na dva različita načina, ali tako da se uvek dobije isti rezultat?

2. (4 poena) U ravni je dato nekoliko tačaka takvih da nikoje tri ne pripadaju istoj pravoj. Neke tačke spojene su dužima. Zna se da svaka prava koja ne prolazi kroz date tačke seče paran broj duži. Dokažite da iz svake tačke polazi paran broj duži.

3. Za svaki prirodan broj n označimo sa $O(n)$ njegov najveći neparni delilac. Dati su proizvoljni prirodni brojevi $x_1=a$ i $x_2=b$. Formirajmo beskonačni niz prirodnih brojeva po pravilu: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$, gde je $n = 3, 4, ...$

a) (2 poena) Dokažite da će, počev od nekog mesta, svi brojevi u nizu biti jednaki jednom istom broju.

b) (2 poena) Kako naći taj broj, ako se znaju brojevi a i b?

4. (4 poena) Redom je napisano nekoliko nula i jedinica. Posmatrajmo (sve) parove cifara u tom redu (ne obavezno susednih), gde je leva cifra 1, a desna 0. Neka se među tim parovima nalazi tačno M takvih u kojima između jedinice i nule ima paran broj cifara (moguće i nijedna), i tačno N takvih u kojima između jedinice i nule stoji neparan broj cifara. Dokažite da je $M \geq N$.

5. (4 poena) U unutrašnjosti nekog tetraedra uzeta je proizvoljna tačka X. Kroz svako teme tetraedra povučena je prava, paralelna duži koja spaja tačku X sa tačkom preseka medijana (težišnih duži) naspramne strane. Dokažite da se četiri dobijene prave seku u jednoj tački.

30. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 15. mart 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Vasa i Pera igraju sledeću igru. Na tabli su napisani brojevi 1/2009 i 1/2008. Pri svakom potezu Vasa bira neki broj *x,* a Pera uveća jedan od brojeva na tabli (koji hoće) za *x.* Vasa pobeđuje ako se u nekom trenutku na tabli pojavi broj 1 Može li Vasa pobediti bez obzira na to kako igra Pera?

2. a) (2 poena) Dokazati da postoji mnogougao koji se može podeliti jednom duži na dva podudarna dela tako da ta duž deli jednu stranicu na pola, a drugu u odnosu 1 : 2.

b) (3 poena) Da li postoji konveksan mnogougao s takvim svojstvom?

3. (5 poena) U svakom polju kvadrata 101×101, osim centralnog, stoji jedan od sledeća dva saobraćajna znaka: "pravo" ili "skreći". Šahovska figura "auto" može spolja ući (pod pravim uglom prema ivici) na bilo koje ivično polje kvadrata. Ako je stala na polje na kojem je znak "pravo", onda produžava pravo na sledeće polje, a ako je stala na polje sa znakom "skreći", onda skreće pod uglom od 90^0 na stranu koju sama izabere. U centralnom polju se nalazi garaža. Mogu li se polja označiti tako da auto ne može da stigne u garažu?

4. (5 poena) Dat je beskonačan niz međusobno različitih prirodnih brojeva. Poznato je da je svaki član tog niza, osim prvog, ili aritmetička ili geometrijska sredina svoja dva susedna člana. Da li su obavezno svi članovi tog niza, počevši od nekog mesta, isključivo aritmetičke ili isključivo geometrijske sredine svojih suseda?

5. (6 poena) Zamak je opasan kružnim bedemom sa 9 kula na kojima stražare vitezovi. Kada protekne sat vremena svaki od njih (istovremeno) prelazi na susednu kulu, pri čemu se svaki od vitezova stalno kreće ili u pravcu kazaljke na satu ili u suprotnom pravcu. Za jednu noć svaki od vitezova je stigao da boravi na svakoj od kula. Poznato je da su u nekom trenutku na svakoj kuli dežurala bar dva viteza, kao i da je bio trenutak kada je na tačno 5 kula bio tačno po jedan vitez. Dokazati da je postojao trenutak kada je postojala kula na kojoj niko nije stražario.

6. (7 poena) Ugao *C* u vrhu jednakokrakog trougla *ABC* je 120^0. Iz temena *C* su puštena (povučena) dva zraka koji između sebe čine ugao od 60^0 i koji se po zakonu "upadni ugao jednak je uglu odbijanja" odbijaju od osnovice *AB* i završavaju na kracima tog jednako-krakog trougla. Na taj način je polazni trougao podeljen na 5 manjih trouglova. Uočimo ona tri koja leže na osnovici *AB.* Dokažite da je površina srednjeg od njih jednaka površini druga dva.

7. (9 poena) Neka C_n^k označava broj načina da se izaberu *k* predmeta iz skupa od *n* različitih predmeta (poredak predmeta nije bitan – načini koji se razlikuju samo u redosledu izbora predmeta smatraju se istim). Dokažite, ako su prirodni brojevi *k* i *l* manji od *n*, onda brojevi C_n^k i C_n^l imaju zajednički delilac veći od 1.

30. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 15. mart 2009. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Pravougaonik je podeljen na nekoliko manjih pravougaonika. Da li je moguće da za svaki par dobijenih pravougaonika duž, koja spaja njihova središta, seče još neki od tih pravougaonika?

2. (4 poena) Dat je beskonačan niz međusobno različitih prirodnih brojeva. Poznato je da je svaki član tog niza, osim prvog, ili aritmetička ili geometrijska sredina svoja dva susedna člana. Da li su obavezno svi članovi tog niza, počevši od nekog mesta, isključivo aritmetičke ili isključivo geometrijske sredine svojih suseda?

3. 6 poena) Na svakom polju table veličine 10×10 nalazi se žeton. U svakom potezu je dozvoljeno odabrati dijagonalu na kojoj se nalazi paran broj žetona i sa nje ukloniti jedan (proizvoljan) žeton. Koji je najveći broj žetona koji se mogu tako ukloniti sa table?

4. (6 poena) Tri ravni dele paralelepiped na osam tela, a svako od njih ima šest strana od kojih je svaka četvorougao (svaka ravan seče par naspramnih strana parelelepipeda, a ne seče preostali par naspramnih strana). Poznato je da se oko jednog od tih osam tela može opisati sfera. Dokazati da se i oko svakog od tih osam tela može opisati sfera.

5. (8 poena) Neka C_n^k označava broj načina da se izaberu *k* predmeta iz skupa od *n* različitih predmeta (poredak predmeta nije bitan – načini koji se razlikuju samo u redosledu izbora predmeta smatraju se istim). Dokažite, ako su prirodni brojevi *k* i *l* manji od *n*, onda brojevi C_n^k i C_n^l imaju zajednički delilac veći od 1.

6. (9 poena) Dat je prirodan broj $n > 1$. Dvoje naizmenično označavaju tačke na kružnici: prvi crvenom, a drugi plavom bojom. Kada je označeno po *n* tačaka svake boje, označavanje (igra) se završava. Zatim svaki od igrača bira luk maksimalne dužine čiji su krajevi njegove boje, ali tako da se na njemu ne nalazi niti jedna označena tačka. Pobeđuje onaj igrač čiji je luk duži. Moguć je i nerešen ishod – u slučaju da su luci jednaki, a takođe ako se ne može naći takav luk (tada se smatra da je dužina luka jednaka nuli). Koji od igrača ima dobitnu strategiju, ma kako igrao njegov protivnik?

7. (9 poena) U memoriju računara je upisan broj 6. Dalje računar vrši milion operacija. Svaka operacija se sastoji u sledećem: u *n*-tom koraku on povećava broj u svojoj memoriji za najveći zajednički delilac tog broja u memoriji i broja *n*. Dokažite da u ma kojem koraku računar uvećava broj u memoriji ili za 1 ili za neki prost broj.