27. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кишињев, Молдавија – 4. мај 2010.

1. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви, доказати неједнакост

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0$$

(Саудијска Арабија)

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, а M средиште AC. Нека је C_1 подножје нормале из C на AB, а H_1 тачка симетрична са H у односу на AB. Нека су P, Q и R подножја нормала из C_1 на праве AH_1, AC и CB, редом, а M_1 центар описаног круга троугла PQR. Доказати да тачка симетрична тачки M у односу на M_1 припада дужи BH_1. *(Србија)*

3. Назовимо *траком ширине* w скуп свих тачака равни које се налазе на или између две паралелне праве на међусобном растојању w. Нека је S скуп од n тачака равни такав да се било које три тачке скупа S могу покрити траком ширине 1. Доказати да се S може покрити траком ширине 2.

(Румунија)

4. За сваки природан број $n \geq 2$, означимо са $f(n)$ збир свих природних бројева не већих од n који нису узајамно прости са n. Доказати да је $f(n+p) \neq f(n)$ за свако такво n и сваки прост број p. *(Турска)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.