The 4th International Mathematical Arhimede Competition

Букурешт, 14.–19. јуни 2010.

Сениорска лига

Први дан – 15. јуни

1. У равни је дато $3n$ тачака ($n \geqslant 1$), од којих су сваке три неколинеарне. Доказати да постоји n међусобно дисјунктних троуглова са теменима у овим тачкама. *(Шпанија)*

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(xy)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$. *(Румунија)*

3. Нека је D подножје висине из B у троуглу ABC. Круг над пречником BD поново сече странице AB и BC редом у тачкама K и L. Тангенте на овај круг у K и L се секу у тачки M. Доказати да BM полови страницу AC. *(Србија)*

Други дан – 16. јуни

4. Нека су M и N две тачке на различитим страницама квадрата $ABCD$. Претпоставимо да дуж MN дели квадрат на два тангентна многоугла. Ако су R и r полупречници кругова уписаних у ове многоуглове ($R > r$), израчунати дужину дужи MN у функцији R и r. *(Молдавија)*

5. Различите тачке $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у равни ($n \geqslant 3$) су такве да је троугао $A_iA_jA_k$ тупоугли за све различите $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да постоји тачка A_{n+1} у равни таква да је троугао $A_iA_jA_{n+1}$ тупоугли за све различите $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *(Србија)*

6. Нека су a, b, c ненегативни реални бројеви са $a + b + c = 2$. Доказати неједнакост

$$\frac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+4}} + \frac{ca}{\sqrt[4]{3b^2+4}} + \frac{ab}{\sqrt[4]{3c^2+4}} \leqslant \frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$$

(Шпанија)