Language: **Serbian**

Day: **1**

Среда, 7. Јул 2010.

1. задатак. Одредити све функције $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ тако да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f\big([x]y\big) = f(x)\big[f(y)\big].$$

($[z]$ је највећи цео број не већи од z.)

2. задатак. Нека је I центар уписане кружнице, а Γ описана кружница $\triangle ABC$. Нека права AI сече Γ у тачкама A и D. Нека је E тачка лука $\widehat{BDC}$, а F тачка дужи BC тако да је

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

Нека је G средиште дужи IF. Доказати да пресек правих DG и EI припада Γ.

3. задатак. Нека је $\mathbb{N}$ скуп свих природних бројева. Одредити све функције $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ тако да је

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$$

квадрат природног броја за све $m, n \in \mathbb{N}$.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки проблем вреди 7 поена

Language: **Serbian**

Day: **2**

Четвртак, 8. Јул 2010.

4. задатак. Нека је P тачка у унутрашњости $\triangle ABC$. Нека праве AP, BP и CP секу описану кружницу Γ троугла ABC по други пут у тачкама K, L и M, редом. Тангента кружнице Γ у C сече праву AB у S. Нека је $SC = SP$. Доказати да је $MK = ML$.

5. задатак. У свакој од шест кутија $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ на почетку се налази тачно један новчић. Дозвољено је вршити следеће операције:

1° Изабрати непразну кутију B_j за неко $1 \leqslant j \leqslant 5$. Избацити један новчић из B_j и додати два новчића у B_{j+1}.

2° Изабрати непразну кутију B_k за неко $1 \leqslant k \leqslant 4$. Избацити један новчић из B_k и заменити садржаје (могу бити и празни) кутија B_{k+1} и B_{k+2}.

Испитати да ли се коначним низом оваквих операција може постићи да су кутије B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 празне, а кутија B_6 садржи тачно $2010^{2010^{2010}}$ новчића. (Важи $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

6. задатак. Нека је $a_1, a_2, a_3, \ldots$ низ позитивних реалних бројева. Нека за неки природан број s важи

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

за свако $n > s$. Доказати да постоје природни бројеви ℓ и N, тако да је $\ell \leqslant s$ и важи $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ за свако $n \geqslant N$.

Време рада: 4 сата и 30 минута
Сваки проблем вреди 7 поена