51. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Астана, Казахстан – среда, 7. јул 2010.

1. Одредити све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да за све $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f([x]y) = f(x)[f(y)].$$

($[z]$ је највећи цео број не већи од z.) *(Француска)*

2. Нека је I центар уписаног круга, а Γ описани круг $\triangle ABC$. Нека права AI сече Γ у тачкама A и D. Нека је E тачка лука $\widehat{BDC}$, а F тачка дужи BC тако да је

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

Нека је G средиште дужи IF. Доказати да се праве DG и EI секу на кругу Γ. *(Хонг Конг)*

3. Одредити све функције $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такве да је

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$$

квадрат природног броја за све $m,n\in\mathbb{N}$. *(САД)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

51. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Астана, Казахстан – четвртак, 8. јул 2010.

4. Нека је P тачка у унутрашњости троугла ABC. Праве AP, BP и CP секу описани круг Γ троугла ABC по други пут у тачкама K, L и M, редом. Тангента круга Γ у тачки C сече праву AB у S. Ако је $SC = SP$, доказати да је $MK = ML$.
(Пољска)

5. У свакој од шест кутија $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ на почетку се налази тачно један новчић. Дозвољено је вршити следеће операције:

1° Изабрати непразну кутију B_j за неко $1 \leqslant j \leqslant 5$, избацити један новчић из B_j и додати два новчића у B_{j+1}.

2° Изабрати непразну кутију B_k за неко $1 \leqslant k \leqslant 4$, избацити један новчић из B_k и заменити садржаје (могу бити и празни) кутија B_{k+1} и B_{k+2}.

Испитати да ли се коначним низом оваквих операција може постићи да су кутије B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 празне, а кутија B_6 садржи тачно $2010^{2010^{2010}}$ новчића. (Важи $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)
(Холандија)

6. Нека је $a_1, a_2, a_3, \ldots$ низ позитивних реалних бројева. За неки природан број s важи

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

за свако $n > s$. Доказати да постоје природни бројеви ℓ и N такви да је $\ell \leqslant s$ и важи $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ за свако $n \geqslant N$.
(Иран)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. За $x=y=0$ добијамо $f(0)=f(0)[f(0)]$, одакле је $f(0)=0$ или $[f(0)]=1$.

Ако је $[f(0)]=1$, стављањем $y=0$ у везу из задатка добијамо $f(x)=f(0)=c\in[1,2)$ за све x. За $c\in[1,2)$ функција $f(x)=c$ јесте решење јер је $f([x]y)=f(x)[f(y)]=c$.

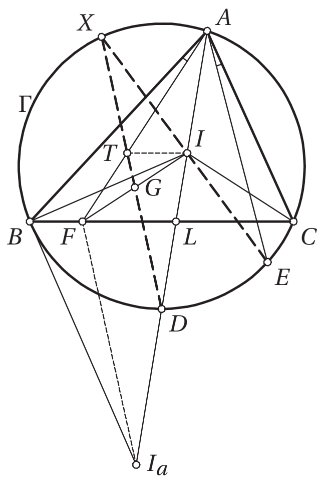
Нека је сада $f(0)=0$. За $x\in[0,1)$ веза из задатка даје $f(x)[f(y)]=0$, дакле $f(x)=0$ за све $x\in[0,1)$ или $[f(y)]=0$ за све y.

1° Ако је $[f(y)]=0$ за све y, за $x=1$ добијамо $f(y)=0$. Функција $f(y)=0$ је такође решење.

2° Нека је $f(x)=0$ за $x\in[0,1)$. За $y\in\mathbb{R}$, нека је n цео број такав да је $\frac{y}{n}\in[0,1)$. Тада је $f(y)=f(n\cdot\frac{y}{n})=f(n)[f(\frac{y}{n})]=0$, тј. опет $f\equiv 0$.

Једина решења су константне функције $f(x)=c$, где је $c=0$ или $1\leqslant c<2$.

2. Ако је I_a центар приписаног круга $\triangle ABC$ наспрам A, важи $\sphericalangle IBI_a=90^\circ$ и $DI=DB$, па је D средиште дужи II_a. Даље, из $\sphericalangle AI_aB=\sphericalangle ACI$ и $\sphericalangle I_aAB=\sphericalangle CAI$ следи $\triangle ABI_a\sim\triangle AIC$, док из $\sphericalangle EAC=\sphericalangle BAF$ и $\sphericalangle AEC=\sphericalangle ABF$ следи $\triangle AEC\sim\triangle ABF$. Из ових сличности добијамо $\frac{AF}{AI_a}=\frac{AF}{AB}\cdot\frac{AB}{AI_a}=\frac{AC}{AE}\cdot\frac{AI}{AC}=\frac{AI}{AE}$, а то заједно са $\sphericalangle FAI_a=\sphericalangle IAE$ даје $\triangle AI_aF\sim\triangle AEI$. Ако сада означимо са X другу пресечну тачку праве EI и Γ, имамо $\sphericalangle ADG=\sphericalangle AI_aF=\sphericalangle AEI=\sphericalangle AEX=\sphericalangle ADX$, па је X на правој DG, што је и требало доказати.



Друго решење. Нека права EI поново сече Γ у X, а XD сече AF и IF редом у T и G'. Како је $\sphericalangle IXT=\sphericalangle EXD=\sphericalangle EAD=\sphericalangle DAF=\sphericalangle IAT$, тачке I,A,X,T су на кругу, па је $\sphericalangle AIT=180^\circ-\sphericalangle AXD=\sphericalangle ACD=\sphericalangle ALB$. Следи да је $TI\parallel BC$ и одатле $\frac{AT}{TF}=\frac{AI}{IL}$, где је L тачка пресека AD и BC. С друге стране, важи и $\frac{AI}{IL}=\frac{AD}{DI}$ (заиста, ако је L' симетрична тачки L у односу на CI, онда је $IL'\parallel CD$, па је $\triangle AL'I\sim\triangle ACD$ и одатле $\frac{AI}{IL}=\frac{AI}{IL'}=\frac{AD}{DC}=\frac{AD}{DI}$). Сада нам Менелајева теорема у $\triangle AFI$ даје $1=\frac{FG'}{G'I}\cdot\frac{ID}{DA}\cdot\frac{AT}{TF}=\frac{FG'}{G'I}$, па је $G'\equiv G$.

3. Користићемо следеће тврђење.

Лема. Ако је p прост број и $p\mid g(m)-g(n)$, онда $p\mid m-n$.

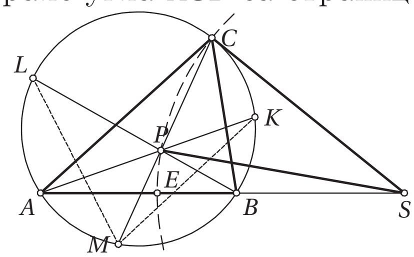
Доказ. Ако $p^2 \mid g(m)-g(n)$, онда постоји $l \in \mathbb{N}$ такво да $p \parallel l+g(m)$; тада важи и $p \parallel l+g(n)$. По услову задатка, $m+g(l)$ и $n+g(l)$ такође морају бити дељиви са p, одакле $p \mid m-n$.

Ако $p \parallel g(m)-g(n)$, постоји l такво да $p^3 \parallel l+g(m)$; тада $p \parallel l+g(n)$. И у овом случају следи да $p \mid m+g(l), n+g(l)$, па $p \mid m-n$.

Функција g је инјективна. Заиста, ако је $g(m)=g(n)$, онда по леми $p \mid m-n$ за свако просто p, тј. $m=n$. Даље, ако $p \mid g(n+1)-g(n)$, онда $p \mid 1$; према томе, $g(n+1)-g(n)=\pm 1$. Притом није $g(n+1)-g(n)=-(g(n)-g(n-1))$ јер би иначе било $g(n+2)=g(n)$. Зато индукцијом имамо $g(n+1)-g(n)=g(2)-g(1)=\epsilon$ за све n, па је $g(n)=c+\epsilon n$ за неку константу $c \geqslant 0$. Како је $g(n)>0$ за све n, отпада могућност $\epsilon=-1$. Према томе, $g(n)=n+c$.

Функција $g(n)=n+c$ задовољава услове јер је $(g(m)+n)(m+g(n))=(m+n+c)^2$.

4. Нека је B између A и S. Ако је E пресек симетрале угла ACB са страницом AB, важи $\sphericalangle CES = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACE = \sphericalangle BCS + \sphericalangle ECB = \sphericalangle ECS$, па круг $k(S, SC)$ пролази кроз E. Како је $\frac{EA}{EB}=\frac{CA}{CB}$, k је Аполонијев круг, тј. геометријско место тачака X за које је $\frac{XA}{XB}=\frac{CA}{CB}$. Дакле, услов $SP=SC$ је еквивалентан са $\frac{PA}{PB}=\frac{CA}{CB}$.



С друге стране, из сличности $\triangle PKM \sim \triangle PCA$ и $\triangle PLM \sim \triangle PCB$ следи $\frac{PM}{KM}=\frac{PA}{CA}$ и $\frac{LM}{PM}=\frac{CB}{PB}$, одакле множењем добијамо $\frac{LM}{KM}=\frac{PA}{PB}\cdot\frac{CB}{CA}$. Закључујемо да је и услов $LM=KM$ еквивалентан са $\frac{PA}{PB}=\frac{CA}{CB}$.

Друго решење. Претпоставимо да је $SP=SC$. Из $SA\cdot SB = SC^2 = SP^2$ следи да права SP додирује круг APB, па је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle SPB = \sphericalangle CPB - \sphericalangle CPS = \sphericalangle CPB - \sphericalangle SCM = \sphericalangle CLB + \sphericalangle MCL - \sphericalangle CLM = \sphericalangle MCL - \sphericalangle BLM$. Како је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle KAB = \sphericalangle KLB$, добијамо $\sphericalangle MKL = \sphericalangle MCL = \sphericalangle BLM + \sphericalangle KLB = \sphericalangle KLM$ и одатле $MK=ML$.

5. Низом операција, из полазног стања $(1,1,1,1,1,1)$ редом добијамо стања

$$(1,1,1,0,3,1) \to (1,1,1,0,0,7) \to (1,1,0,2,0,7) \to (1,0,2,2,0,7) \to (0,2,2,2,0,7)$$
$$\to (0,2,2,1,7,0) \to (0,2,2,1,0,14) \to (0,2,2,0,14,0) \to (0,2,1,14,0,0).$$

Лема 1. За $a \in \mathbb{N}$, низом операција на три кутије, од стања $(a,0,0)$ се може доћи до стања $(0,2^a,0)$.

Доказ. Индукција по a. Тврђење је тачно за $a=1$. Претпоставимо да је тачно за $a-1$. Тада се из стања $(a,0,0)$, занемарујући један новчић у првој кутији, може добити стање $(1,2^{a-1},0)$. Примењујући операцију 1° 2^{a-1} пута добијамо стање $(1,0,2^a)$, одакле операцијом 2° добијамо $(0,2^a,0)$.

Лема 2. Дефинишимо $T_1 = 2$ и $T_{a+1} = 2^{T_a}$. За $a \in \mathbb{N}$, низом операција на четири кутије, од стања $(a,0,0,0)$ се може доћи до стања $(0,T_a,0,0)$.

Доказ. Индукција по a. Тврђење је тачно за $a = 1$. Претпоставимо да је тачно за $a-1$. Тада из стања $(a,0,0,0)$ можемо доћи до $(1,T_a,0,0)$, па по леми 1 до $(1,0,T_{a+1},0)$, и након једне операције 2° имамо $(0,T_{a+1},0,0)$.

Користећи низове корака описане у лемама 1 и 2, добијамо

$$(0,2,1,14,0,0) \to (0,2,1,0,2^{14},0) \to (0,2,0,2^{14},0,0) \to (0,1,2^{14},0,0,0)$$
$$\to (0,1,0,T_{2^{14}},0,0) \to (0,0,T_{2^{14}},0,0,0) \to (0,0,0,T_{T_{2^{14}}},0,0).$$

Очигледно је $T_{T_{2^{14}}}$ много веће од $N = 2010^{2010^{2010}}$ (већ је $T_6 > N$). Сада применом операције 2° $T_{T_{2^{14}}} - \frac{1}{4}N$ пута добијамо стање $(0,0,0,\frac{1}{4}N,0,0)$, одакле операцијама 1° долазимо до $(0,0,0,0,\frac{1}{2}N,0)$, па до $(0,0,0,0,0,N)$.

Напомена. Насупрот апсолутно огромним бројевима који се могу добити са 6 кутија, у аналогном проблему са 4 кутије може се добити само 28 новчића.

6. Нека је $n > r$. По дефиницији је $a_n = a_{n_1} + a_{n_2}$ за неке индексе n_1, n_2 са $n_1 + n_2 = n$. Ако је даље нпр. $n_1 > r$, можемо да наставимо поступак за a_{n_1}, итд. све док не добијемо

$$a_n = a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \tag{1}$$

за неке $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant r$. Ако су притом i_1 и i_2 индекси добијени у последњем кораку, онда је $i_1 + i_2 > r$. С друге стране, ако су $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant r$ и $i_1 + i_2 > r$, онда је $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} \leqslant a_{i_1+i_2} + a_{i_3} + \cdots + a_{i_k} \leqslant \cdots \leqslant a_{i_1+i_2+\cdots+i_k}$. Следи да је

$$a_n = \max\{a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant r,\ i_1 + i_2 > r\} \quad \text{за све } n > r. \tag{2}$$

Посматрајмо $\ell \in \{1, \ldots, r\}$ такво да је $\frac{a_\ell}{\ell} = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \frac{a_i}{i}$. Нека је $n > r(r\ell + 2)$. Како је у (1) $k \geqslant \frac{n}{r} > r\ell + 2$, међу индексима $i_3, \ldots, i_k$ постоји неки који се појављује бар ℓ пута: нека је $i_{k-\ell+1} = \cdots = i_k = j$. Како по дефиницији ℓ имамо $\ell a_j \leqslant j a_\ell$, из (2) следи $a_n \geqslant a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k-\ell}} + j a_\ell \geqslant a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k-\ell}} + \ell a_j = a_n$, па обе ове неједнакости морају бити једнакости. Према томе, можемо да претпо- ставимо да је у (1) бар један сабирак једнак a_ℓ.

Ако је сада у (1) $i_k = \ell$, из услова задатка и релације (2) следи $a_{n-\ell} \leqslant a_n - a_\ell = a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k-1}} \leqslant a_{n-\ell}$, одакле је $a_n = a_{n-\ell} + a_\ell$.

Друго решење. Поново посматрајмо $1 \leqslant \ell \leqslant r$ за које је $s = \frac{a_\ell}{\ell} = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \frac{a_i}{i}$. Уведимо $b_n = a_n - ns$. Низ (b_n) задовољава исту рекурентну релацију као и (a_n) и лако се показује индукцијом да је $b_n \leqslant 0 = b_\ell$ за све n.

Ако је $b_n = 0$ за $n = 1, \ldots, r$, важи $b_n = 0$ и $a_n = ns$ за све n, па је тврђење задатка тривијално. У супротном, нека су M и m редом највећи и најмањи међу ненула члановима низа $|b_1|, \ldots, |b_r|$. За $n > r$ важи $b_n \geqslant b_{n-\ell} + b_\ell = b_{n-\ell}$, па је $b_n \geqslant b_{n-\ell} \geqslant b_{n-2\ell} \geqslant \cdots \geqslant -M$.

С друге стране, као у (1) у првом решењу, b_n припада скупу

$$T = \{b_{i_1} + \dots + b_{i_k} \mid i_1, \dots, i_k \leqslant r\} \cap [-M, 0].$$

Међутим, ако је $b_n = b_{i_1} + \dots + b_{i_k}$, број не-нула сабирака у овом представљању није већи од $\frac{M}{m}$. Следи да је T коначан скуп. Најзад, низ $b_n, b_{n+\ell}, b_{n+2\ell}, \dots$ је неопадајући, па мора бити константан почев од неке тачке. Према томе, и низ (b_n) је периодичан почев од неке тачке, одакле следи тврђење.