ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Први разред, А категорија

1. Нека су T_1 и T_2 тежишта $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$, редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3 \cdot \overrightarrow{T_1T_2}\,.$$

2. Природан број n даје остатак 35 при дељењу и са 2009 и са 2010. Колики је остатак броја n при дељењу са 42?

3. Нека је CD симетрала $\sphericalangle BCA$ троугла ABC ($D \in AB$) и $AC + BD = BC + AD$. Доказати да је $\triangle ABC$ једнакокрак.

4. Да ли број $2010^{2010} + 10^{2011}$ има већи број цифара у декадном запису од броја 2010^{2010}?

5. Свако од јединичних поља таблице 3×3 обојено је једном од три боје. Колико има различитих бојења код којих су свака два суседна јединична поља (тј. поља са заједничком страницом) различите боје?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Први разред, Б категорија

1. Одредити скупове A и B за које важи:

1° $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

2° $2 \in A \setminus B$,

3° $3 \in B \setminus A$,

4° $A \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$ и

5° $B \cap \{1\} = \emptyset$.

2. Нека је $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $g(5 - 2x) = 4x - 7$.

(а) Одредити $g(x)$.

(б) Одредити функцију f, ако је $f = g \circ g$.

(в) Доказати да је f бијекција и одредити $f^{-1}(x)$.

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је број $n(n-3)(n^2 - 3n + 14)$ дељив са 8.

4. Природан број n даје остатак 35 при дељењу и са 2009 и са 2010. Колики је остатак броја n при дељењу са 42?

5. Свако од јединичних поља таблице 3×3 обојено је једном од три боје. Колико има различитих бојења код којих су свака два суседна јединична поља (тј. поља са заједничком страницом) различите боје?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Други разред, А категорија

1. Нека је $m \in \mathbb{R}$ такав да једначина $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ има реалне и различите корене. Доказати да је тачно један корен те једначине у интервалу $(-2, 3)$.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$, а M средиште странице BC. Права која садржи тачку H и нормална је на праву HM сече праве AB и AC у E и F, редом. Доказати да је $HE = HF$.

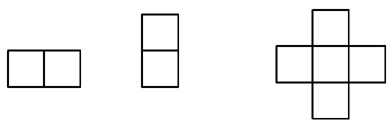
3. Одредити природан број n чији је кубни корен једнак броју који се из n добија брисањем његове последње три цифре у декадном запису.

4. Доказати да постоји бесконачно много уређених парова $(x, y) \in (0, \pi)^2$, тако да је скуп

$$\left\{\sin^2 x + \sin^2 y, \sin^2(x+y), 1\right\}$$

двоелементан, а скуп $\{\sin nx + \sin ny \mid n \in \mathbb{N}\}$ коначан.

5. Да ли се табла 8×8, из које је исечено доње-лево и горње-десно поље, може поплочати фигурама облика:



?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Други разред, Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве z, тако да важи $z - \overline{z} = 4 - 2i - |z - i|$.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$x^2 + x + \frac{3}{x^2 + x + 1} \leqslant 3.$$

3. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle BCA$. Нека је BE $(E \in AC)$ симетрала $\sphericalangle ABC$. Доказати да је $AB^2 = AC \cdot AE$.

4. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које је број $n^2 + 9n - 22$ прост.

5. Нека је $m \in \mathbb{R}$ такав да једначина $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ има реалне и различите корене. Доказати да је тачно један корен те једначине у интервалу $(-2, 3)$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_{\sqrt{x}} \log_2 (4^x - 12) \leqslant 2.$$

2. Одредити највећи заједнички делилац бројева $1 + 2010!$ и $1 + (2010!)!$.

3. Нека је D средиште лука $\widehat{BC}$ описане кружнице $\triangle ABC$ који не садржи тачку A, а M тачка полигоналне линије $B - A - C$ најближа тачки D. Ако је $AC > AB$, доказати да је $CM = \dfrac{AC - AB}{2}$.

4. Нека је S скуп тачака (x, y) у координатној равни чије су координате цели бројеви који задовољавају $0 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 4$ и нека је одабрана 21 тачка из S. Доказати да постоји правоугаоник чија су темена међу одабраним тачкама, а странице паралелне координатним осама.

5. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle BCA > 90^\circ$ и $\sphericalangle CAB < \sphericalangle ABC$. Тангента на описану кружницу k у тачки A сече праву BC у тачки P. Нека је M тачка на k, таква да је $PM = PC$ (различита од тачке C), N пресек правих CM и AB, а D пресек описане кружнице $\triangle AMN$ и праве AP (различит од A). Доказати да је $CD \parallel AB$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1-a, \\ ax & - & y & + & z & = & -1, \\ x & - & ay & - & z & = & 0. \end{array}$$

2. У лопту је уписана правилна тространа пирамида са правим ивичним угловима при врху. Одредити однос дужина висине пирамиде и полупречника лопте.

3. Нека је $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ако је

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+3\varphi)}{d},$$

доказати да је $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{b+d}{c}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Колико решења има скуповна једначина

$$X \cup Y = \{1, 2, \ldots, n\}?$$

5. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_{\sqrt{x}} \log_2 (4^x - 12) \leqslant 2.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Четврти разред, А категорија

1. Доказати да за $x > 0$ важи неједнакост

$$1 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{x^3}{16} < (1+x)^{\frac{3}{2}} < 1 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2.$$

2. На таблу 8×8 поставити највећи могући број топова, тако да сваки од њих туче тачно једног од преосталих топова.

3. У оштроуглом $\triangle ABC$ је $BC > CA$. Нека је O центар описане кружнице, а H ортоцентар овог троугла и F подножје нормале из C на AB. Нормала на OF у F сече AC у P. Доказати да је $\sphericalangle FHP = \sphericalangle CAB$.

4. Одредити све просте бројеве p, такве да $p^{2010} \mid 2010^{p^{2010}} + 1$.

5. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle BCA > 90^\circ$ и $\sphericalangle CAB < \sphericalangle ABC$. Тангента на описану кружницу k у тачки A сече праву BC у тачки P. Нека је M тачка на k, таква да је $PM = PC$ (различита од тачке C), N пресек правих CM и AB, а D пресек описане кружнице $\triangle AMN$ и праве AP (различит од A). Доказати да је $CD \parallel AB$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Четврти разред, Б категорија

1. Одредити вредности $m \in \mathbb{R}$ за које систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & + & mz & = & 3, \\ x & + & my & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева и одредити то решење.

2. Вектори $\overrightarrow{a} + 2 \cdot \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} - 3 \cdot \overrightarrow{b}$ су колинеарни. Доказати да су вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ колинеарни.

3. У лопту је уписана правилна тространа пирамида са правим ивичним угловима при врху. Одредити однос дужина висине пирамиде и полупречника лопте.

4. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \geqslant 9^{\sqrt{x}}.$$

5. Колико има реалних $x \in \left[2009^2\pi, 2010^2\pi\right]$ за које је низ

$$\sin x,\ \sin 3x,\ \sin 5x, \ldots, \sin(2n+1)x, \ldots$$

аритметички?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.