ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Први разред, А категорија

1. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle ABC = 80^\circ$. Тачка D на страници BC је таква да важи $AB = AD = CD$, тачка F на страници AB је таква да важи $AF = BD$ и тачка E на правој BC је таква да важи $B - C - E$ и $\sphericalangle BEF = 20^\circ$. Доказати да је $DE = AC$.

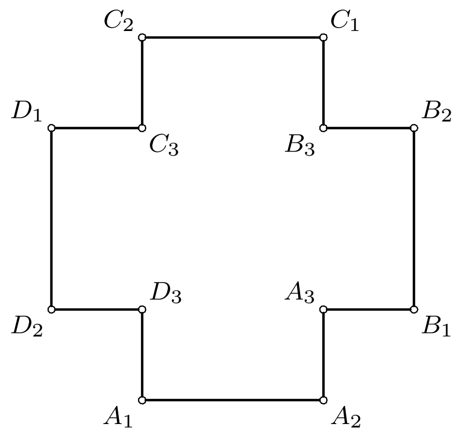
2. Четвороугао $ABCD$ је трапез ($AB \parallel CD$) у који се може уписати круг. Доказати да се кружница над пречником BC и кружница над пречником AD додирују.

3. Нека је $n > 1$ природан број. Колико има n-тоцифрених бројева који су палиндроми и дељиви су са 9?

(Број је палиндром уколико му је декадни запис симетричан, тј. запис му је исти слева на десно и здесна на лево.)

4. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима, такав да за неке просте бројеве $p < q < r$ важи $\{P(p), P(q), P(r)\} = \{20, 3, 2010\}$. Доказати да је $P(p+q) = 2010$.

5. Може ли се унутар фигуре са слике (укључујући руб) сместити девет тачака, међу којима никоје три нису колинеарне, тако да кадгод неке три од њих образују троугао који припада унутрашњости фигуре, његова површина је већа од 2 ($A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2 = 2$, $A_2A_3 = A_3B_1 = B_2B_3 = B_3C_1 = C_2C_3 = C_3D_1 = D_2D_3 = D_3A_1 = 1$)?



Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Први разред, Б категорија

1. Нека је $f(x) = -\dfrac{2x+7}{x+3}$ и $f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n\text{-пута}}(x)))$, за $n \in \mathbb{N}$. Одредити $f_{2009}(2010)$.

2. На колико се начина број 2010 може представити као збир неколико (бар два) узастопних природних бројева?

3. Ако је $a, b > 0$ и $a + b = 2$, доказати да је

$$\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} < 3.$$

4. У $\triangle ABC$ угао код темена B је двоструко већи од угла код темена A, а тежишна дуж CM је нормална на симетралу $\sphericalangle ABC$. Одреди углове $\triangle ABC$.

5. Симетрале AA_1, BB_1, CC_1 углова $\triangle ABC$ секу се у тачки S ($A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$). Ако су полупречници кружница уписаних у троуглове $SAB_1, SB_1C, SCA_1, SA_1B, SBC_1, SC_1A$ једнаки, доказати да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Други разред, А категорија

1. Нека у конвексном петоуглу $ABCDE$ важи $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ$ и $\sphericalangle BDC = \sphericalangle DAE$. Нека су M, N и P, редом, средишта дужи AD, BD и EC. Доказати да је $\sphericalangle MPN = 90^\circ$.

2. Да ли у низу

$$21, 2011, 200111, 20001111, \ldots, 2\underbrace{0\ldots0}_{2009}\underbrace{1\ldots1}_{2010}$$

има више простих или сложених бројева?

3. Доказати да је $\sin\left(24\arcsin\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{6+3\sqrt{2}}}{4}\right) = 0.$

4. Колико има уређених тројки $(a, b, c) \in \{1, 2, ..., 2010\}^3$ таквих да за сваки природан број n једначина

$$(a+n)x^2 + (b+2n)x + (c+n) = 0$$

има бар једно реално решење?

5. На сваком пољу шаховске табле написан је по један број између 1 и 64 (сваки број тачно једном). Са колико најмање питања се може сазнати тачан распоред бројева (тј. сазнати који је број у ком пољу), ако се једним питањем може сазнати који су бројеви написани у произвољно одабраном скупу поља (али не и њихов распоред у тим пољима)?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Други разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\log_2 3 + 3\log_4 x = \left(x^{\log_9 16}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}}.$$

2. Нека је x негативан реалан број. Испитати шта је веће

$$4^x + 1 \quad \text{или} \quad 2^x + 3^x.$$

3. Одредити све тројке природних бројева a, b, c које одговарају дужинама страница троугла коме је пречник описане кружнице $6,25$.

4. Одредити највећи могући број дељив са 72 који се може добити из броја $1\,2\,3\,\ldots\,2009\,2010$ брисањем неких његових цифара.

5. Племе има азбуку која садржи само слова А и Б. Њихов речник има особину да не постоје две речи такве да је једна почетак друге (на пример, ако постоји реч БА, не постоје речи БАА, БАБ и БАБА). Ако њихов речник садржи тачно 1 двословну, 2 трословне, 4 петословне и 5 шестословних речи, колико највише четворословних речи може садржати?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Трећи разред, А категорија

1. У $\triangle ABC$ тачке M и N су пресеци тежишне дужи и симетрале унутрашњег угла из темена A са страницом BC, редом. Тачке Q и P су тачке пресека нормале у N на NA са правама MA и BA, редом, а тачка O је пресек нормале у P на AB са правом AN. Доказати да је $QO \perp BC$.

2. Нека је са $\overline{a_n b_n}$ означен двоцифрени број који представља последње две цифре броја $1^{2010} + 2^{2010} + \ldots + n^{2010}$, за $n \in \mathbb{N}$ (у декадном запису). Одредити да ли је број $0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$ рационалан.

3. Колико решења има функционална једначина

$$f(n) + f(n + f(n)) = n$$

ако:

(а) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$; **(б)** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$?

4. Нека је низ $(f_n)_{n \geqslant 1}$ дефинисан са $f_1 = 1, f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \in \mathbb{N}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ уредити бројеве $f_k f_{n-k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ у неопадајући низ.

5. На табли је записан систем

$$\begin{array}{ccccccccc} \star\, x_1 & + & \star\, x_2 & + & \ldots & + & \star\, x_{2010} & = & \star \\ \star\, x_1 & + & \star\, x_2 & + & \ldots & + & \star\, x_{2010} & = & \star \\ & & & & \vdots & & & & \\ \star\, x_1 & + & \star\, x_2 & + & \ldots & + & \star\, x_{2010} & = & \star \end{array}$$

који садржи 2010 једначина. Аца и Бранко, наизменично, уместо једне звездице уписују реалан број по избору. Аца игра први. Који од играча има победничку стратегију ако:

(а) Аца побеђује у случају да систем има бесконачно много решења, а Бранко у случају да је противречан;

(б) Аца побеђује у случају да је систем противречан, а Бранко у случају да систем има бесконачно много решења?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Трећи разред, Б категорија

1. Две странице троугла припадају правим $3x + 5y - 14 = 0$ и $x + 3y - 5 = 0$, а ортоцентар тог троугла је $H(1, 1)$. Одредити једначину праве којој припада трећа страница троугла.

2. Одредити (ако постоји) најмањи природан број n такав да је

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin n^\circ} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos n^\circ} = 4\sqrt{2}.$$

3. Нека је $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left|z^2+1\right| = |z+i| \right\}$. Доказати да за произвољне $z_1, z_2 \in S$ важи $|z_1 - z_2| \leqslant 3$. Испитати када се достиже једнакост.

4. Нека је са $\overline{a_n b_n}$ означен двоцифрени број који представља последње две цифре броја $1 + 2 + \ldots + n$, за $n \in \mathbb{N}$ (у декадном запису). Одредити да ли је број $0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$ рационалан.

5. Нека је S скуп тачака у равни, такав да за сваке две тачке $A, B \in S$ постоји тачка $C \in S$ на кружници чији је пречник AB, различита од тачака A и B. Доказати да је скуп S бесконачан.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Четврти разред, А категорија

1. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама M и N, при чему је центар кружнице k_2 на кружници k_1. Нека је P произвољна тачка на луку MN кружнице k_2 који се налази унутар круга k_1. Праве MP и NP секу k_1 по други пут у тачкама A и B, редом. Нека је S средиште дужи AB, а тачке C и D пресеци полуправе SP са кругом k_1 и k_2, редом (различити од P). Доказати да је $PC = CD$.

2. Нека је p непаран прост број. Доказати да је

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{k^3}{p}\right] = \frac{(p-2)(p-1)(p+1)}{4}\,.$$

3. За сваки природан број n, нека је a_n број нула којима се завршава бинарни запис броја n (на пример, $a_5 = 0$, јер је 101 бинарни запис броја 5; $a_{20} = 2$, јер је 10100 бинарни запис броја 20). Нека је $b_n = 1$ ако је a_n непаран број, а иначе нека је $b_n = 0$. Испитати да ли је број $x = 0,b_1b_2b_3\ldots$ рационалан (запис броја x је у бинарном систему).

4. Доказати да је $2\cos\dfrac{p\pi}{9}$ корен полинома $x^3 - 3x - 1$ за сваки прост број $p > 3$.

5. Да ли се раван може обојити у 2010 боја тако да свака кружница садржи тачке свих боја?

(Свака тачка равни обојена је тачно једном бојом.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Четврти разред, Б категорија

1. За које вредности реалног параметра a једначина

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \cdot \log_{\frac{1}{\pi}} a$$

има решења?

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\left(5\sqrt{2} - 7\right)^x + 2 \leqslant 5 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^x.$$

3. Одредити највећи могући количник запремине лопте и запремине купе описане око те лопте.

4. Две параболе, чије су директрисе међусобно нормалне, имају четири различите заједничке тачке, A_1, A_2, A_3, A_4. Доказати да тачке A_1, A_2, A_3, A_4 припадају једној кружници.

5. У конвексном петоуглу $ABCDE$ углови код темена B и E су прави и важи $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EAD$. Ако се праве BD и CE секу у тачки O, доказати да су праве AO и BE ортогоналне.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.