THE 3$^{\text{RD}}$ ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

ПРВИ ДАН: Петак, 26.02.2010, Букурешт

Language: српски

1. задатак.

За непразан коначан скуп простих бројева P, са $m(P)$ означен је највећи број узастопних природних бројева, тако да је сваки од њих дељив неким елементом скупа P.

(i) Доказати да је $|P| \leqslant m(P)$ и да једнакост важи ако и само ако је $\min P > |P|$.

(ii) Доказати да је $m(P) < (|P|+1)(2^{|P|}-1)$.

Romania, Dan Schwarz

2. задатак.

За сваки природан број n одредити највећу реалну константу C_n, такву да за сваких n реалних функција $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$ дефинисаних на интервалу $[0,1]$ постоје бројеви x_1, x_2, ..., x_n из интервала $[0,1]$, тако да важи

$$|f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n) - x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| \geqslant C_n.$$

Serbia, Marko Radovanović

3. задатак.

Нека је $A_1A_2A_3A_4$ конвексан четвороугао коме ниједан пар наспрамних страница није паралелан. За свако $i = 1, 2, 3, 4$ нека је ω_i кружница која се налази ван четвороугла и додирује праве $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} и $A_{i+1}A_{i+2}$ (индекси се посматрају по модулу 4, тј. $A_0 = A_4$, $A_5 = A_1$ и $A_6 = A_2$). Нека је T_i тачка додира дужи A_iA_{i+1} и кружнице ω_i. Доказати да се праве A_1A_2, A_3A_4 и T_2T_4 секу у једној тачки ако и само ако се праве A_2A_3, A_4A_1 и T_1T_3 секу у једној тачки.

Russia, Pavel Kozhevnikov

Сваки задатак вреди 7 поена.

Време за рад $4\frac{1}{2}$ сата.

THE 3RD ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

ДРУГИ ДАН: Субота, 27.02.2010, Букурешт

Language: српски

4. задатак.

Испитати да ли постоји полином $f(x_1, x_2)$ две променљиве са целим коефицијентима и тачке $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$ у равни, за које су испуњени следећи услови:

(i) A је целобројна тачка (тј. a_1 и a_2 су цели бројеви);
(ii) $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| = 2010$;
(iii) $f(n_1, n_2) > f(a_1, a_2)$ за сваку целобројну тачку (n_1, n_2) у равни различиту од A;
(iv) $f(x_1, x_2) > f(b_1, b_2)$ за сваку тачку (x_1, x_2) у равни различиту од B.

Italy, Massimo Gobbino

5. задатак.

Дат је природан број n. За скуп K тачака са целобројним координатама кажемо да је *повезан* ако за сваки пар тачака $R, S \in K$ постоји природан број ℓ и низ $R = T_0, T_1, \ldots, T_\ell = S$ тачака из K, тако да је дужина дужи T_iT_{i+1} једнака 1, за свако $0 \leqslant i \leqslant \ell - 1$.

За сваки такав скуп K нека је

$$\Delta(K) = \left\{ \overrightarrow{RS} \mid R, S \in K \right\}.$$

Одредити највећу могућу вредност $|\Delta(K)|$, по свим повезаним скуповима K од $2n+1$ целобројних тачака у равни.

6. задатак.

Нека је $f(x)$ полином са рационалним коефицијентима степена већег од 1. Низ скупова $f^0(\mathbb{Q}), f^1(\mathbb{Q}), \ldots$ дефинисан је са $f^0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $f^{n+1}(\mathbb{Q}) = f(f^n(\mathbb{Q}))$, за $n \geqslant 0$ (за скуп S је $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$). Нека је $f^\omega(\mathbb{Q}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbb{Q})$. Доказати да је скуп $f^\omega(\mathbb{Q})$ коначан.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад $4\frac{1}{2}$ сата.