31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 18. oktobar 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Može li se kvadrat razrezati na 9 kvadrata i obojiti tako da se dobije 1 beli, 3 siva i 5 crnih kvadrata, pri čemu bi istobojni kvadrati bili jednaki, a raznobojni kvadrati – nejednaki?.

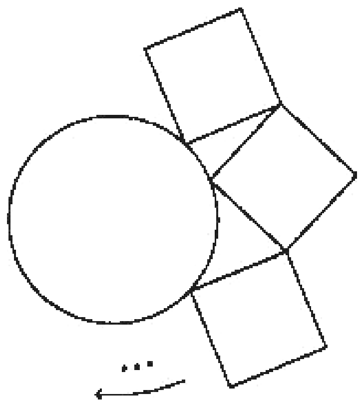
2. (4 poena) Imamo 40 tegova mase 1 g, 2 g, ..., 40 g. Od njih je izabrano 10 tegova s parnom masom i stavljeni su na levi tas terazija. Zatim je izabrano 10 tegova s neparnom masom i stavljeni su na desni tas terazija. Terazije su bile u ravnoteži. Dokažite da se na nekom tasu nalaze dva tega čije se mase razlikuju za 20 g.

3. (4 poena) Na stolu se nalazi kartonski krug poluprečnika 5 cm. Petar, sve dok može, prislanja uz krug spolja kartonske kvadrate stranice 5 cm, tako da budu ispunjeni ovi uslovi:

1) kod svakog kvadrata jedno teme leži na kružnici-granici kruga;

2) kvadrati se ne prekrivaju;

3) svaki sledeći kvadrat dodiruje prethodni u temenu.



Odredite koliko kvadrata može postaviti Petar i dokažite da će prvi i poslednji kvadrat takođe da imaju zajedničko teme.

4. (5 poena) Sedmocifrenu šifru (kod), nazvaćemo dobrim ako se sastoji od sedam različitih cifara. Sef je zaključan (zaštićen) dobrom šifrom. Poznato je da će se sef otvoriti ako se unese dobra šifra koja se bar na jednoj poziciji poklapa sa šifrom sefa (reč je o poklapanju cifara na istoj poziciji). Može li se garantovano sef otvoriti za manje od 7 pokušaja?

5. (5 poena) Na jednom novom sajtu registrovalo se 2000 ljudi. Svaki je pozvao 1000 ljudi među onima koji su registrivani na tom sajtu da mu budu prijatelji. Dva čoveka postaju prijatelji tada i samo tada kada pozovu jedan drugog. Koliki je najmanje broj parova prijatelja na tom sajtu?

31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 18. oktobar 2009. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Sedmocifrenu šifru (kod), nazvaćemo dobrim ako se sastoji od sedam različitih cifara. Sef je zaključan (zaštićen) dobrom šifrom. Poznato je da će se sef otvoriti ako se unese dobra šifra koja se bar na jednoj poziciji poklapa sa šifrom sefa (reč je o poklapanju cifara na istoj poziciji). Može li se garantovano sef otvoriti za manje od 7 pokušaja?

2. (4 poena) U prostoru se nalazi zatvorena izlomljena linija od šest delova *ABCDEF* čiji su suprotni delovi paralelni ($AB \| DE$, $BC \| EF$ i $CD \| FA$). Pri tome *AB* nije jednako *DE*. Dokažite da svi delovi izlomljene linije leže u istoj ravni.

3. (4 poena) Postoje li prirodni brojevi a, b, c, d takvi da važi jednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}?$$

4. (4 poena) Na svakoj stranici pravilnog 2009-ougla uočena je i označena po jedna tačka. Te tačke su temena 2009-ugla površine *S*. Svaka od tih uočenih tačaka preslikana je simetrično u odnosu na središte stranice na kojoj se ta tačka nalazi. Dokažite da 2009-ugao s temenima u dobijenim (preslikanim) tačkama takođe ima površinu *S*.

5. (5 poena) U nekoj saveznoj državi nalaze se dva glavna grada (severni i juž-ni) i nekoliko drugih gradova od kojih su neki povezani autoputevima. Među tim putevima ima i onih na kojima se plaća putarina. Poznato je da na ma kojem putu iz južne prestonice u severnu ima ne manje od 10 puteva (deonica) gde se plaća putarina. Dokažite da se svi putevi (deonice puta), za koje se plaća putarina, mogu podeliti između deset kompanija, tako da na ma kojem putu iz južne u severnu prestonicu ima puteva (deonica) svake od tih kompanija.

31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Sožena varijanta, 25. oktobar 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) U 10 jednakih bokala razliveno je mleko – ne obavezno na ravne delove, ali je svaki bokal bio ispunjen ne više od 10%. U jednom koraku možemo odabrati jedan bokal i odliti iz njega bilo koju, ali jednaku količinu mleka u ostale bokale. Dokažite da se za ne više od 10 takvih operacija može postići da u svim bokalima bude ista količina mleka.

2. (6 poena) Miša ima 1000 jednakih kockica, pri čemu je kod svake jedan par suprotnih strana bele boje, drugi par – plave boje, a treći par – crvene boje. On je od njih sastavio veliku kocku 10×10×10, prislanjajući jednu do druge strane iste boje. Dokažite da ta velika kocka ima istobojnu stranu.

3. (6 poena) Odredite sve prirodne brojeve *a* i *b*, takve da $(a+b^2)(b+a^2)$ predstavlja broj koji je stepen broja 2.

4. (6 poena) Na stranicama *BC* i *CD* romba *ABCD* uzete su tačke *P* i *Q* (tim redom) tako da je *BP*=*CQ*. Dokažite da se presečna tačka težišnih duži trougla *APQ* nalazi na dijagonali *BD* romba.

5. (9 poena = 2 poena +7 poena) Između tegova mase 1 g, 2 g, 3 g, ..., *N* g treba izabrati nekoliko tegova (više od jednog) sa sumarnom masom koja je jednaka prosečnoj masi preostalih tegova. Dokažite:

a) to se može učiniti ako je *N*+1 kvadrat celog broja (2 poena);

b) ako se to može učiniti, onda je *N*+1 kvadrat celog broja (7 poena).

6. (10 poena) Na ravan sa kvadratnom mrežom stavljano je 2009 jednakih kvadrata čije stranice leže na linijama mreže. Zatim su označena sva polja (kvadratići) koja su pokrivena neparnim brojem kvadrata. Dokažite da tako označenih polja nema manje od broja polja u jednom kvadratu.

7. (14 poena) Olga i Maksim platili su za putovanje po arhipelagu od 2009 ostrva, pri čemu su neka ostrva povezana dvosmernim brodskim maršrutama. Putovanje su organizovali kao igru. Na početku Olga bira ostrvo na koje će prvo da doputuju. Zatim zajedno putuju brodovima, naizmenično birajući ostrvo, na kojem još nisu bili. Počinje da bira Maksim. Gubi onaj ko ne može da izabere ostrvo (jer nema broda koji ide sa ostrva na kojem se nalaze na neko neposećeno ostrvo). Dokažite da pri ma kojoj šemi maršruta Olga može da pobedi, ma kako igrao Maksim.

31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.
Složena varijanta, 25. oktobar 2009. god.
10–11. razred (stariji uzrast)
(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Sto pirata igrali su karte uz plaćanje u zlatu (zlatnim peskom), a zatim je svaki izbrojao koliko je puta ukupno dobio ili izgubio. Svaki pirat koji izgubi ima dovoljno zlata da plati. Tokom jedne operacije (igre) pirat može bilo da svima iz svojih zaliha dâ (isplati) jednaku količinu zlata (kad izgubi), bilo da njemu (kada igru dobije) svaki od ostalih pirata plati jednu te istu istu količinu zlata. Dokažite da se za nekoliko takvih operacija može postići da svaki pirat dobije (sumarno) svoj dobitak ili da isplati gubitak (To znači: ako je neko u igri dobio neku količinu zlata, onda on posle toga (posle podele) ima za toliko zlata više nego što je imao do podele; a ako je u igri izgubio neku količinu zlata, onda on posle toga ima za toliko manje zlata nego što je imao do tada. Razume se da je ukupan broj dobitaka jednak ukupnom broju gubitaka).

2. (6 poena) Od N pravougaonih pločica (ne moraju biti jednake) sastavljen je pravougaonik s nejednakim stranicama. Dokažite da se svaka pločica može raseći na dva dela tako da se od N delova može sastaviti kvadrat, a od preostalih N delova– pravougaonik.

3. (7 poena) Sfera dodirije sve ivice tetraedra. Spojimo dodirne tačke koje su na parovima nesusednih ivica. Dokazati da se tri tako dobijene duži seku u jednoj tački.

4. (9 poena) Označimo sa $[n]!$ proizvod $1\cdot 11\cdot 111\cdot ...\cdot 1...11$ (n jedinica) – svega n faktora. Dokažite da je broj $[n+m]!$ deljiv proizvodom $[n]!\cdot[m]!$.

5. (9 poena) Dati su trougao XYZ i konveksan šestougao $ABCDEF$. Stranice AB, CD i EF su paralelne i redom jednake stranicama XY, YZ i ZX. Dokažite da površina trougla s temenima u središtima stranica BC, DE i FA nije manja od površine trougla XYZ.

6. (12 poena) Olga i Maksim platili su za putovanje po arhipelagu od 2009 ostrva, pri čemu su neka ostrva povezana dvosmernim brodskim maršrutama. Putovanje su organizovali kao igru. Na početku Olga bira ostrvo na koje će prvo da doputuju. Zatim zajedno putuju brodovima, naizmenično birajući ostrvo, na kojem još nisu bili. Počinje da bira Maksim. Gubi onaj ko ne može da izabere ostrvo (jer nema broda koji ide sa ostrva na kojem se nalaze na neko neposećeno ostrvo). Dokažite da pri ma kojoj šemi maršruta Olga može da pobedi, ma kako igrao Maksim.

7. (14 poena) Na ulazu u pećinu postavljen je uspravno bubanj (cilindar), na kome je po obodu (kružno) na jednakim razmacima raspoređeno N po izgledu spolja jednakih burića. U svakom burencetu nalazi se haringa – bilo s glavom nagore, bilo s glavom nadole, ali gde i kako – ne vidi se. U jednom koraku Ali-Baba bira nekoliko burića (od 1 do N komada) i prevrće ih. Posle toga bubanj počinje da se okreće, a kada se zaustavi, Ali-Baba ne može da odredi koji burići su bili prevrnuti. Pećina se otvara ako za vreme okretanja bubnja svih N haringi budu okrenute glavom na istu stranu. Za koje vrednosti N Ali-Baba može za izvestan broj koraka otvoriti pećinu?