31. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 28. februar 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) U šest korpi nalaze se kruške, šljive i jabuke. Broj šljiva u svakoj korpi jednak je broju jabuka u ostalim korpama uzetih zajedno, a broj jabuka u svakoj korpi jednak je broju krušaka u ostalim korpama uzetih zajedno. Dokažite da je ukupan broj voćki deljiv sa 31.

2. (3 poena) Miloš i Kosta seku kvadratnu tortu. Kosta bira na torti tačku (ali ne na rubu/granici). Posle toga Miloš čini pravolinijski rez od izabrane tačke do kraja (u bilo kom pravcu). Zatim Kosta čini drugi pravolinijski rez od izabrane tačke do kraja, ali normalan na prvi rez, a onda manji od dobijenih delova daje Milošu. Miloš želi da dobije bar četvrtinu torte. Može li ga Kosta u tome sprečiti?

3. Nacrtan je ugao i na raspolaganju je samo šestar.

a) (2 poena) Koliko najmanje kružnica treba nacrtati da bi se sa sigur-nošću utvrdilo da li je dati ugao oštar?

b) (2 poena) Kako utvrditi da li je veličina datog ugala 31^0? Dopušteno je opisivati koliko-god bilo kružnica.

4. (5 poena) Na jednoj olimpijadi svaki učesnik poznaje bar tri druga učesnika. Dokažite da se može izabrati grupa sa parnim brojem učesnika (više od 2 čoveka) i rasporediti ih oko okruglog stola tako da svaki poznaje oba svoja suseda.

5. (5 poena) Na tabli je napisan 101 broj: 1 na kvadrat, 2 na kvadrat, ... , 101 na kvadrat. U jednoj operaciji (koraku) dopušteno je izbrisati ma koja dva broja i umesto njih zapisati moduo (apsolutnu vrednost) njihove razlike. Koji najmanji broj se može dobiti posle 100 takvih operacija?

31. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 28. februar 2010. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Iz Južne Amerike u Rusiju prevoze banane, limune i ananase 2010 brodova. Broj banana na svakom brodu jednak je broju limuna na svim ostalim brodovima uzetim zajedno, a broj limuna na svakom broju jednak je broju ananasa na ostalim brodovima uzetim zajedno. Dokažite da je ukupan broj južnog voća na brodovima deljiv sa 31.

2. (4 poena) O funkciji $f(x)$ poznato je sledeće: ma koja prava u koordinatnoj ravni ima sa grafikom $y=f(x)$ onoliko zajedničkih tačaka koliko ih ima sa parabolom $y=x^2$. Dokažite da je funkcija $f(x)$ identički jednaka x^2.

3. (5 poena) Može li se površ pravilnog oktaedra oblepiti sa nekoliko pravilnih šestouglova bez preklapanja i praznina (razmaka)? /Pravilan oktaedar ima 6 temena, sve strane su mu jednakostranični trouglovi, a u svakom temenu sustiču se 4 strane/

4. (5 poena) Baron Minhauzen je zamolio da neko zamisli polinom (različit od konstante) $P(x)$ s celim nenegativnim koeficijentima i da mu saopšti samo vrednosti $P(2)$ i $P(P(2))$. Baron tvrdi da on samo na osnovu tih podataka uvek može rekonstruisati (pogoditi) zamišljeni polinom. Da li baron greši?

5. (6 poena) U ravni se nalazi igla. Dopušteno je iglu okretati za 45^0 oko bilo kojeg njenog kraja. Može li se, učinivši nekoliko takvih okretanja igle, postići to da se igla vrati na početno mesto, ali tako da su njeni krajevi zamenili mesta? /Smatrajte da je igla duž?/

31. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 14. mart 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najvi{e poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Imamo komad (parče) sira. Dopušteno je izabrati ma koji pozitivan (može i neceo) broj a, različit od 1, pa razrezati (podeliti) to parče u odnosu $1 : a$ po težini, zatim razrezati u tom istom odnosu ma koji od nastalih komada, itd. Može li se to (u)raditi tako da posle konačnog broja razrezivanja ceo sir bude podeljen na dve gomile iste težine?

2. (4 poena) U trouglu ABC tačka M je središte stranice AC, a tačka P leži na stranici BC. Duž APseče BM u tački O. Pokazalo se da je $BO=BP$. Nađite odnos OM:PC

3. Na kružnici je raspoređeno 999 brojeva, svaki je jednak 1 ili -1, pri čemu nisu svi brojevi jednaki. Uzmimo sve proizvode po 10 uzastopnih brojeva (tj.. koji su jedan za drugim) i saberimo ih.

a) (3 poena) Koliki najmanji zbir se tako može dobiti?

b) (3 poena) A koji najveći?

4. (6 poena) Zbir cifara prirodnog broja n jednak je 100. Može li zbir cifara kuba broja n da bude jednak 1000000?

5. a) (3 poena) Tri viteza jašu na konjima po kružnom putu u smeru suprotnom kretanju satne kazaljke. Mogu li oni da jašu neograničeno dugo s različitim stalnim brzinama, ako na putu postoji samo jedna tačka (mesto) gde jahači imaju mogućnost da prestignu jedan drugog?

b) A ako ima 10 vitezova?

6. (8 poena) U ravni je data otvorena izlomljena linija koja samu sebe nigde ne seče, a sastoji se od 31 dela (duži) (susedni delovi ne pripadaju jednoj pravoj). Preko svakog dela izlomljene linije povučena je prava koja sadrži taj deo. Dobijena je 31 prava, pri čemu je moguće da su se neke prave poklopile. Koliki je najmanji broj različitih pravih koje se tako mogu dobiti?

7. (11 poena) Na nekim poljima table 10×10 nalazi se po jedna buva. Svakog minuta buve skaču, svaka na susedno polje (u odnosu na stranicu). Buve skaču samo u jednom od četiri pravca, paralelna ivicama table, ostajući na istom pravcu, dok je to moguće, a u protivnom slučaju menjaju smer u suprotni. Pera je posmatrao buve u toku jednog sata i nijednom nije video da se dve buve nalaze na istom polju. Koliki je najveći broj buva mogao da skače po tabli?

31. TURNIR GRADOVA

Prolćno kolo.
Složena varijanta, 14. mart 2010. god.
10–11. razred (stariji uzrast)
(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Mogu li se sve prave u ravni razdvojiti na parove uzajamno normalnih pravih tako da svaka prava pripada tačno jednom paru normalnih pravih?

2. a) (2 poena) Imamo parče sira. Dopušteno je izabrati ma koji iracionalan broj a>0 i razrezati (podeliti) to parče u odnosu 1 : a po težini, zatim razrezati u tom istom odnosu ma koji od nastalih komada, itd. Može li se to (u)raditi tako da posle konačnog broja razrezivanja ceo sir bude podeljen na dve gomile iste težine?
b) (2 poena) Isto pitanje, ako se bira pozitivan racionalan broj $a\neq 1$.

3. (6 poena) Može li se, primenjujući na broj 1 funkcije sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg, u nekom redosledu, dobiti broj 2010? (Svaka funkcija se može koristiti koliko-god hoćete puta).

4. (6 poena) Na kongresu se skupilo 5000 ljubitelja filma, pri čemu je svaki video bar jedan film. Podeljeni su u sekcije dva tipa: ili rasprava o filmu koji su videli svi članovi sekcije; ili svaki priča o filmu koji je on video, a nije ga više video niko u sekciji. Dokazati da se svi mogu podeliti tačno na 100 sekcija.(Dopuštena je i sekcija od jednog čoveka: on piše mišljenje o filmu koji je video).

5. (7 poena) Trideset tri viteza jašu na konjima po kružnom putu u smeru suprotnom kretanju satne kazaljke. Mogu li oni da jašu neograničeno dugo s različitim stalnim brzinama, ako na putu postoji samo jedna tačka (mesto) gde jahači imaju mogućnost da prestignu jedan drugog?

6. (8 poena) Četvorougao $ABCD$ je opisan oko kružnice s centrom I . Tačke M i N su središta stranica AB i CD. Zna se da je $IM/AB=IN/CD$. Dokažite da je $ABCD$ trapez ili paralelogram.

7. (9 poena) Dat je prirodan broj. Dopušteno je izmeću cifara broja na proizvoljan način postaviti pluseve i izračunati nastali zbir (na primer, od broja 123456789 može se dobiti zbir 12345+6+789=13140). S dobijenim brojem ponovo se može vršiti slična operacija, i tako dalje. Dokazati da se, polazeći od ma kojeg broja, može dobiti jedno-cifrerni broj, obavivši ne više od 10 operacija.